ORSAY
n° d'ordre : 3272

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
Pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR 3e CYCLE

Spécialité : Physique Théorique

par

Daniel BEAUFILS

SUJET : Astrophysique théorique : (I) Magnétosphère des pulsars ; (II) Mouvement d'un fluide au voisinage de la ligne neutre d'un champ magnétique.

Soutenue le 24 Juin 1982 devant la Commission d'examen

MM. J. HEYVAERTS Président
E. ASSEO
C. DEUTSCH
M. FITAIRE
R. PELLAT

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543515_0031

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR 3e CYCLE

Spécialité : Physique Théorique

par

Daniel BEAUFILS

SUJET : Astrophysique théorique : (I) Magnétosphère des pulsars ; (II) Mouvement d'un fluide au voisinage de la ligne neutre d'un champ magnétique.

Soutenue le 24 Juin 1982 devant la Commission d'examen

MM. J. HEYVAERTS Président
E. ASSEO
C. DEUTSCH
M. FITAIRE
R. PELLAT

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A ma femme et ma fille
qui en subirent la génèse.

PRESENTATION

Dans cette thèse, deux sujets d'Astrophysique théorique ont été abordés. La première partie est consacrée à la recherche de la structure du plasma magnétosphérique d'un pulsar. Dans la seconde partie, une solution magnétohydrodynamique générale est donnée pour le mouvement d'un cylindre de fluide au voisinage de la ligne neutre de type X d'un champ magnétique.

Ce travail a été effectué au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique. Je remercie Madame Asséo et Monsieur Pellat de m'avoir accueilli dans leur groupe et de m'avoir guidé dans mon travail.

Je remercie Monsieur Heyvaerts d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, ainsi que Messieurs Fitaire et Deutsch d'avoir bien voulu participer à ce même jury.

Que tous les membres du Centre de Physique Théorique soient remerciés pour l'agréable ambiance que j'y ai trouvée.

Je tiens également à remercier tout particulièrement Messieurs Hafchain et Houssais, Directeurs du Collège Esclangon de Viry-Châtillon qui m'ont rendu possible la tâche de mener de front mon enseignement au Collège et mon travail de recherche.

Que Madame Delongeas, qui a dactylographié le manuscrit avec diligence et compétence soit vivement remerciée ainsi que tous les membres du Secrétariat pour leur gentillesse.

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE

I - INTRODUCTION

1) La découverte des pulsars

2) Les modèles de pulsars

3) La recherche d'un modèle satisfaisant de magnétosphère.

II - LE PREMIER MODELE DE PULSAR : GOLDREICH ET JULIAN (1969)

1) Le modèle standard d'étoile

2) La magnétosphère autour du pulsar.

III - PLASMA MAGNETOSPHERIQUE "FORCE-FREE" D'EXTENSION FINIE

1) L'idée des particules "trappées"

2) La solution divergente de Michel

3) Le résultat de Pilipp

4) Inexistence d'un gap séparant l'étoile d'un plasma magnétosphérique force-free.

IV - MODELES DE PLASMAS MAGNETOSPHERIQUES AVEC COURANTS

1) Introduction

2) L'inconsistence du modèle de Scharleman, Arons, Fawley pour le rotateur aligné

3) Tentative de modèle de faisceaux réfléchis à distance finie de l'étoile

4) Modèle d'un plasma magnétosphérique "force-free" qui échange des électrons avec l'étoile.

V - RESUME ET CONCLUSION

REFERENCES

DEUXIEME PARTIE

I - INTRODUCTION

II - EQUATIONS DE LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

1) Les équations générales de la magnétohydrodynamique

2) Spécification du problème.

III - SOLUTION EXACTE

IV - SOLUTION COMPLETE POUR UN FLUIDE D'EXTENSION FINIE

1) Solution intérieure

2) Solution extérieure : a) coordonnées élliptiques
b) cas incompressible
c) cas compressible

V - CONCLUSION

REFERENCES

PREMIERE PARTIE

I - INTRODUCTION

1. La découverte des pulsars

C'est en Novembre 1967 que J. Bell et A. Hewish (Cambridge University) détectèrent la première émission radio pulsée en provenance de l'espace.

La découverte de ce qu'on appela pulsar fut annoncée par Hewish et ses collaborateurs dans "Nature" en Février 1968. Dès lors les observations de Pulsars devaient se multiplier. Deux pulsars ont été découverts dans les nébuleuses du Crabe et de Véla. Le pulsar du Crabe avec une période de 0,033 s et celui de Véla avec une période de 0,089 s. La période typique d'un pulsar est de 1 s.

2. Les modèles de Pulsars

La première étape dans l'étude théorique des pulsars fut de chercher l'explication des pulses très réguliers et de courtes périodes. Seule la rotation rapide d'une étoile très dense peut expliquer un tel phénomène. C'est ainsi que le modèle d'étoile à neutron fortement magnétisé et en rotation rapide proposé par Pacini en 1967 fut adopté par Gold (1968) comme modèle de pulsar.

Si dès lors la régularité des émissions pulsées était expliquée, de nombreuses difficultés allaient apparaitre pour comprendre le mécanisme d'émission lui-même. L'extrême intensité des émissions indique que seul un mécanisme cohèrent peut en être la cause.

Il est admis que l'émission radio provient des régions qui entourent l'étoile elle-même. En conséquence, la connaissance de la structure de cette région est de première importance. L'une des premières déductions que l'on peut faire des observations est l'intensité du champ magnétique dipolaire qui y règne. On peut en effet déterminer l'intensité B_o du champ magnétique qui règne à la surface à partir de la diminution au cours du temps de la période P de rotation. La relation déduite du couple de freinage due à l'émission d'ondes électromagnétiques dipolaires s'écrit :

$$B_o \simeq \left(\frac{3 I c^3 P \dot{P}}{8 \pi^2 R_*^6} \right)^{1/2}$$

I est le moment d'inertie.

R_* est le rayon de l'étoile ($R_* \simeq 10^6$ cm)

$\dot{P}$ est la variation de la période au cours du temps.

Les valeurs de B_o ainsi calculées sont comprises entre 2.10^{10} et 2.10^{13} G. La valeur typique est de 10^{12} G. C'est donc un intense champ magnétique qui règne autour du pulsar.

La rotation de l'étoile et cet intense champ magnétique engendrent un champ électrique capable d'extraire des charges électriques de la surface stellaire. La magnétosphère du pulsar doit donc être au moins partiellement occupée par un plasma de particules chargées. Ainsi la structure de ce plasma magnétosphérique conditionne la nature du mécanisme d'émission.

Différents modèles d'émission situent la source dans une zone de plasma en corotation avec l'étoile (Eastlund (1968), (1970); Smith (1970) ; Ginzburg et al (1969)) ou le long des lignes de champ courbes parcourues par des particules chargées, au dessus des régions polaires (Radhakrishnan et Cooke (1969), Sturrock (1971), Ruderman Sutherland (1975).

3. La recherche d'un modèle satisfaisant de magnétosphère

Il est donc clair que l'étude de la magnétosphère du pulsar conditionne celle des mécanismes d'émission. De nombreux travaux ont été faits dans des voies très différentes (Jackson (1980), Michel (1979); Mestel (1979);Scharleman et al (1978) sans qu'aucun n'apporte une réponse définitive.

Dans ce travail nous avons cherché à faire apparaitre un modèle satisfaisant en examinant progressivement les différentes possibilités.

Pour cette étude nous avons choisi le modèle du rotateur aligné dans lequel l'axe du champ magnétique dipolaire coincide avec l'axe de rotation de l'étoile. Les motivations de ce choix sont multiples :

a) ce modèle est celui introduit dans les premiers travaux (Goldreich et Julian 1969).

b) il représente un système physique complexe non résolu et est donc intéressant du point de vue purement théorique.

c) il est possible que la nature pulsée des émissions puisse être introduite comme une simple modification de ce modèle de base.

Dans la partie II nous avons présenté le modèle d'étoile proposé par Goldreich et Julian et discuté le modèle simple de magnétosphère qui en découle.

Dans la partie III nous montrons comment la structure du champ électromagnétique qui entoure un pulsar sans plasma magnétosphérique tend à piéger les électrons émis par la surface stellaire. Nous étudions ensuite l'existence d'un plasma magnétosphérique "force-free" d'extension finie pouvant empêcher l'émission d'électrons à la surface de l'étoile. Nos conclusions nous conduisent alors vers des modèles plus complexes.

La partie IV est consacrée à l'étude de modèles de plasmas magnétosphériques comportant des faisceaux d'électrons. Nous y proposons un modèle réaliste mixte constitué de zones "force-free" et de faisceaux, qui apparait comme une synthèse des deux points de vue.

La partie V résume la progression suivie et les résultats obtenus, et conclut ce travail.

II - LE PREMIER MODELE DE PULSAR:GOLDREICH ET JULIAN (1969)

En 1968 Goldreich et Pacini ont émis l'idée que les pulsars pourraient être des étoiles à neutrons, fortement magnétisées ($B_o \simeq 10^{12}$G) qui tournent sur elles-même très rapidement. Les périodes de rotation des pulsars observés sont comprises entre 4,308 s (1845 - 19) et 0,033 s (0531 + 21). La valeur typique utilisée étant 1s. Peu de temps après, en 1969, Goldreich et Julian ont proposé un modèle d'étoile qui est devenu le modèle standard. A partir de ce modèle ils ont déduit que la magnétosphère devrait être remplie d'un plasma de particules chargées en corotation avec l'étoile. A partir des difficultés soulevées par ce modèle, se sont posés les problèmes de l'existence de la nature et de la stabilité d'un plasma magnétosphérique, pierres d'achoppement de la théorie des pulsars.

1. Le modèle standard d'étoile

Nous allons donc tout d'abord décrire les configurations d'équilibre envisagées pour les champs électrique et magnétique, le potentiel et la densité de charge qui règnent dans une étoile à neutron tournant sur elle-même.

L'étoile à neutron en rotation peut être assimilée à une sphère parfaitement conductrice et fortement magnétisée en rotation rigide autour d'un axe z passant par son centre. Dans ce cas les champs électrique ($\vec{E}$) et magnétique ($\vec{B}$) sont liés par la relation :

$$\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} = \vec{0} \qquad (1)$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de rotation du plasma stellaire et c la célérité de la lumière. Si $\vec{\Omega_*} = \Omega_* \vec{z}$ désigne le vecteur vitesse angulaire de l'étoile :

$$\vec{v} = \vec{\Omega_*} \wedge \vec{r}$$

et donc

$$\vec{E} + \left(\frac{\vec{\Omega_*} \wedge \vec{r}}{c} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0} \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) appelées aussi condition "force-free" permettent de rendre compte de l'équilibre, dans lequel les forces électrique et magnétique qui s'éxercent en tout point du plasma se compensent ; les forces d'origine non électromagnétique (inertie, pression, gravitation) étant négligées. Ceci est justifié par la valeur très élevée du champ magnétique. Ces relations traduisent aussi, par l'intermédiaire de la loi d'Ohm, que la conductivité est infinie (Jackson J.D., Classical Electrodynamic p. 472).

On peut faire un calcul simple de la densité ρ à partir de l'équation (2) lorsqu'on suppose que l'étoile crée à l'extérieur un champ magnétique dipolaire dont l'axe de symétrie coincide avec l'axe de rotation $\vec{z}$. Le calcul se réduit à la résolution d'un simple problème d'électrostatique puisque la dépendance azimuthale (angle φ) et par conséquent la dépendance temporelle disparaissent.

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{4\pi c} \operatorname{div} \left[(\vec{\Omega}_* \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} \right] \tag{3}$$

$$\rho = -\frac{1}{4\pi c} \left\{ \left(\vec{rot} \, (\vec{\Omega}_* \wedge \vec{r}) \right) . \vec{B} - (\vec{\Omega}_* \wedge \vec{r}) . \vec{rot} \, \vec{B} \right\} \tag{4}$$

Mais le second terme du crochet est lié à la densité ρ puisque $\vec{rot} \, \vec{B}$ représente le terme de source provenant de la rotation des charges :

$$\vec{rot} \, \vec{B} = 4\pi \left(\frac{\vec{\Omega}_* \wedge \vec{r}}{c} \right) \rho \tag{5}$$

Le second terme du crochet est donc d'ordre 2 en $\Omega_* r \sin\theta / c$, quantité très petite du fait des dimensions de l'étoile ($R \simeq 10^6$ cm $r \leqslant R$). On peut donc ne considérer que le premier terme du crochet qui est du premier ordre.

Le champ magnétique dipolaire extérieur a pour expression en coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\vec{B}_d : \left(B_0 \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 \cos\theta \, , \; B_0 \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 \frac{\sin\theta}{2} \, , \; 0 \right) \tag{6}$$

Il peut être prolongé à la zone périphérique intérieure à l'étoile où la relation (2) s'applique.

L'expression du vecteur vitesse angulaire en coordonnées sphériques est :

$$\vec{\Omega}_* : \left(\Omega_* \cos\theta \, , \, -\Omega_* \sin\theta \, , \, 0\right) \qquad (7)$$

Par conséquent :

$$\left(\vec{rot}\left(\vec{\Omega}_* \wedge \vec{r}\right)\right) \cdot \vec{B}_d = \Omega_* B_0 \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 \left(3\cos^2\theta - 1\right) = 2\vec{\Omega}_* \cdot \vec{B}_d \qquad (8)$$

et

$$\rho \simeq - \frac{\vec{\Omega}_* \cdot \vec{B}_d}{2\pi c} = - \frac{\Omega_* B_0}{2\pi c} \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 P_2(\cos\theta) \qquad (9)$$

$P_2(\cos\theta)$ est le polynôme de Legendre de rang 2.

Pour préciser le signe de la densité de charge il faut choisir l'orientation relative du moment magnétique dipolaire et de l'axe de rotation $\vec{z}$. Dans la suite de ce travail on considère qu'ils ont le même sens ($B_0 > 0$). On utilise dans la littérature la dénomination de pulsar pour cette configuration et celle d'anti-pulsar pour celle qui correspond à des axes dont les sens sont opposés.

La distribution de charges (9) présente plusieurs particularités :

- Elle s'annule pour un angle $\theta \simeq 54°7$; elle est négative lorsque $0 \leqslant \theta \leqslant 54°7$, positive lorsque $54,7 < \theta \leqslant 90°$. L'hémisphère sud est symétrique de l'hémisphère nord par rapport au plan équatorial (voir Fig. 1).

- Le Laplacien de cette densité de charge est nul ; elle est en effet de la forme $\frac{1}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$ qui est solution de l'équation de Laplace.

- Lorsqu'on intègre cette densité sur une couronne sphérique on obtient une charge nulle. Il n'est toutefois pas possible d'intégrer cette densité sut tout le volume de l'étoile dans lequel le champ magnétique n'est pas connu. Si on le suppose dipolaire la densité (9) montre que le centre de l'étoile est un point singulier.

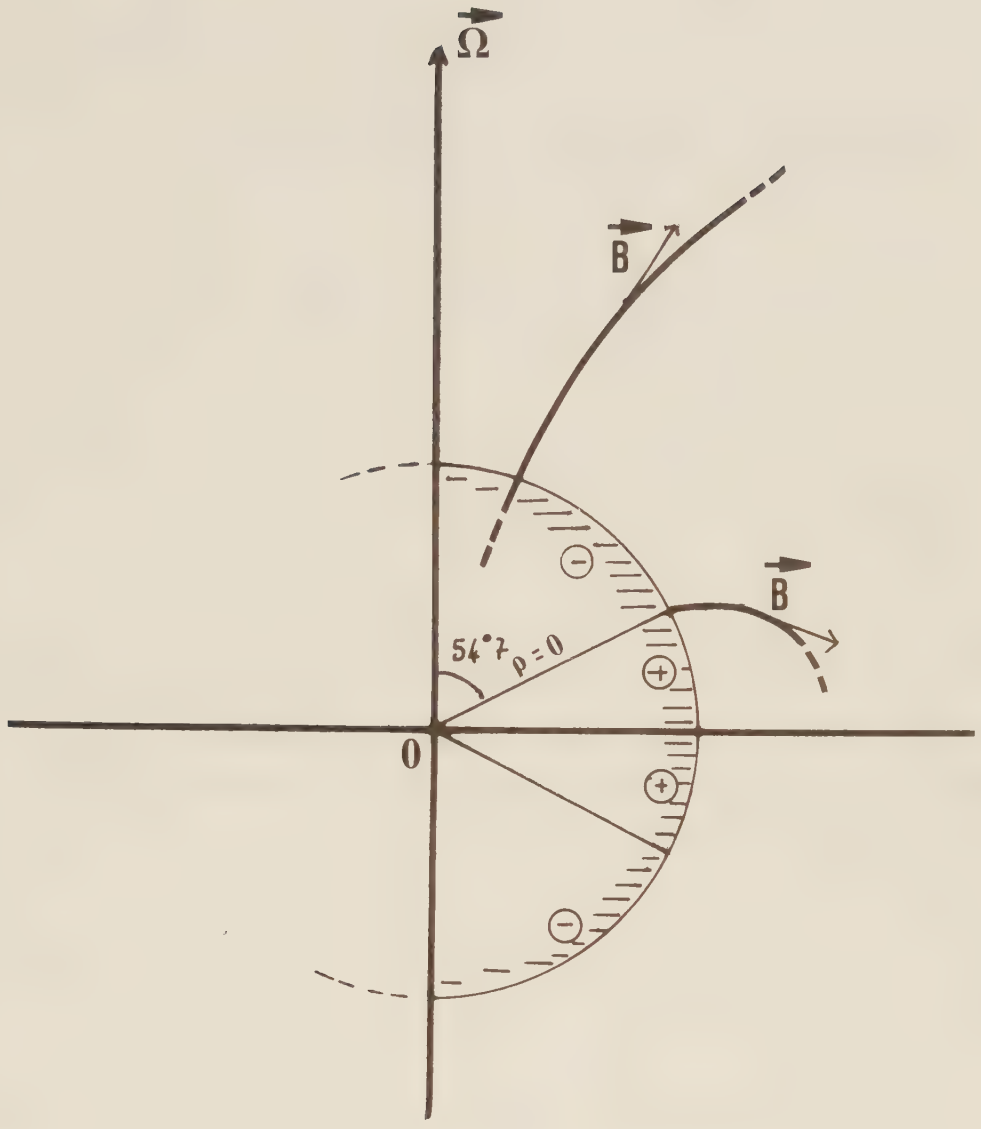


Fig. 1

Modèle d'étoile sphérique constituée d'un plasma "force-free" qui crée dans le vide qui l'entoure, un champ magnétique dipolaire possédant l'axe de rotation $\vec{z}$ comme axe de symétrie. La zone hachurée représente la partie périphérique de l'étoile où le champ magnétique dipolaire extérieur peut être prolongé. La densité de charge y est positive dans la zone équatoriale et négative dans les zones polaires (pulsar).

On peut cependant déterminer la charge en volume de l'étoile en utilisant le théorème de Gauss :

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} 2\pi R_*^2 \, E_r(R_*, \theta) \, d(\cos\theta)$$

De (2) et (6) on déduit la composante radiale du champ électrique

$$E_r = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c} \times \frac{\sin^2\theta}{r^2} \qquad (10)$$

Donc

$$Q = \int_{-1}^{+1} \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{4c} \left(1 - \cos^2\theta\right) d(\cos\theta)$$

$$Q = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{3c} \qquad (11)$$

Ecrivons pour terminer ce paragraphe une expression du potentiel électrique qui règne dans la zone périphérique de l'étoile et qui nous sera utile dans la suite. De façon générale un champ magnétique à symétrie axiale peut s'exprimer en fonction d'un potentiel magnétique ψ.

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin\theta} \, \overrightarrow{\text{grad}}\, \psi \wedge \vec{e}_\varphi \qquad (12)$$

Le potentiel électrique Φ^p détermine le champ électrique dans le plasma :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi^p$$

De l'équation (2) on déduit

$$\Phi^p = \frac{\Omega_*}{c} \psi + \text{constante} \qquad (13)$$

Pour le champ magnétique dipolaire (6) choisi dans ce travail :

$$\Psi = \frac{B_0 R_*^3}{2} \frac{\sin^2\theta}{r} \tag{14}$$

2. La magnétosphère autour du pulsar

Montrons que dans un tel modèle l'étoile ne peut rester entourée de vide à cause de l'extrême intensité du champ magnétique.

Si on suppose l'étoile placée dans le vide il est facile de calculer le potentiel électrique Φ^v qu'elle y crée.

Le vide s'étendant à l'infini la solution pour le potentiel doit être convergente. Une telle solution, à une constante près, s'écrit de façon générale :

$$\Phi^v = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \tag{15}$$

les b_ℓ sont les coefficients du développement du potentiel sur les polynômes de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$.

La continuité de la composante normale du champ magnétique à la surface de l'étoile permet de calculer la composante tangentielle du champ électrique du vide $\vec{E}^v$

$$E_\theta^v(R_*,\theta) = -\frac{\Omega_* R_* B_0}{c} \sin\theta\cos\theta \tag{16}$$

La continuité de cette composante tangentielle permet de déduire le potentiel du vide qui entoure l'étoile.

Si celle-ci est globalement neutre :

$$\Phi^v = -\frac{\Omega_* R_*^2 B_0}{3c} \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 P_2(\cos\theta) \tag{17}$$

Un tel potentiel engendre un champ électrique $\vec{E}^v$ à la surface de l'étoile dont la composante le long des lignes de champ magnétique n'est pas nulle :

$$\vec{E}^v \cdot \vec{B}_d(R_*,\theta) = -\frac{\Omega_* R_* B_0^2}{c} \cos^3\theta \tag{18}$$

$$E_{\parallel}^{v} = \frac{\Omega_* R_* B_0}{c} \cos^3\theta \qquad (19)$$

Ce champ électrique parallèle étant constamment dirigé vers l'intérieur de l'étoile, les électrons de la croûte stellaire vont donc être soumis à une force dirigée vers l'extérieur de l'étoile. Cette force électrique est plus intense, d'un facteur 8.10^{11} (pour $\theta \neq 90°$), que la force gravitationnelle. Or, bien que mal connue, la structure de la croûte de l'étoile s'apparente à celle d'un réseau métallique. En conséquence, les électrons soumis à la force électrique résultant du champ électrique parallèle (19) vont sortir de l'étoile et suivre les lignes de champ magnétique.

Goldreich et Julian ont examiné la situation dans laquelle la magnétosphère est remplie d'un plasma stationnaire parfaitement conducteur qui touche l'étoile.

Un tel plasma est en corotation avec l'étoile : en effet la condition "force-free" (1) peut s'écrire

$$\vec{E} = -\left(\frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}}{c}\right) \wedge \vec{B}_\perp \qquad (20)$$

avec

$$\vec{\Omega} = \Omega(r,\theta)\,\vec{z}$$

Mais la vitesse angulaire $\Omega(r,\theta)$ est constante le long de chaque ligne de champ. En effet d'après (20)

$$\overrightarrow{rot}\left(\Omega r \sin\theta\, \vec{e}_\varphi \wedge \vec{B}_\perp\right) = \vec{0}$$

Soit

$$\Omega\, \overrightarrow{rot}\left(r\sin\theta\, \vec{e}_\varphi \wedge \vec{B}_\perp\right) + \left(\vec{B}.\overrightarrow{grad}\,\Omega\right) r \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$

$$+ \left(\Omega \sin\theta\, \vec{e}_\varphi . \overrightarrow{grad}\,\Omega\right) \vec{B}_\perp = \vec{0}$$

La composante suivant $\vec{e}_\varphi$ se réduit au second terme. On en déduit donc

$$\vec{B} . \overrightarrow{grad}\,\Omega = 0$$

Ceci signifie que la vitesse Ω est constante le long d'une ligne de champ ; mais toutes les lignes de champ touchent l'étoile et la relation (20) est valable continuement de l'étoile au plasma magnétosphérique. Donc $\Omega = \Omega_*$ pour toute ligne de champ : le plasma est en corotation avec l'étoile.

Si le champ magnétique qui règne dans le plasma est toujours dipolaire, les expressions (3), (4), (5), (6), (8) permettent de calculer la densité de charge de ce plasma magnétosphérique :

$$\rho_{GJ} = -\frac{\vec{\Omega}_* \cdot \vec{B}_*}{2\pi c} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega r \sin\theta}{c}\right)^2} \qquad (21)$$

Cette densité s'annule donc pour $\theta = 54°7$; elle est négative dans les régions centrées sur l'axe, positive dans la région équatoriale.

Cette densité diverge lorsque $\frac{\Omega r \sin\theta}{c} = 1$, c'est à dire sur le cylindre de rayon $R_L = \frac{c}{\Omega}$ appelé cylindre de lumière, distance à laquelle la vitesse des particules en corotation atteint la vitesse de la lumière c. Ce cylindre de lumière limite donc la région de plasma en corotation. Au delà de celui-ci les particules qui s'échappent par effet centrifuge créent une zone de vent.

Ceci permet de distinguer la région dans laquelle les lignes de champ magnétique sont fermées de la région dans laquelle elles sont ouvertes. Les lignes fermées sont les lignes de champ magnétique qui se ferment à l'intérieur du cylindre de lumière ; les lignes ouvertes sont celles qui le coupent ; elles sont dites ouvertes car toute particule qui glisse librement sur celles-ci quitte le plasma lorsqu'elle atteint le cylindre de lumière (voir Fig. 2). La ligne qui sépare les deux régions, ouverte et fermée, touche l'étoile en un point de coordonnées :

$$\left(R_*, \theta_c = \left(\frac{\Omega_* R_*}{c}\right)^{1/2}, \varphi\right)$$

Ainsi présenté, ce modèle rend nécessaires plusieurs remarques :

1 - Un tel plasma contient des charges positives. Un problème est de connaître l'origine de ces charges positives. Il n'est en effet pas certain qu'elles puissent avoir été émises par l'étoile, puisque, si la croûte possède une structure de type réseau métallique,

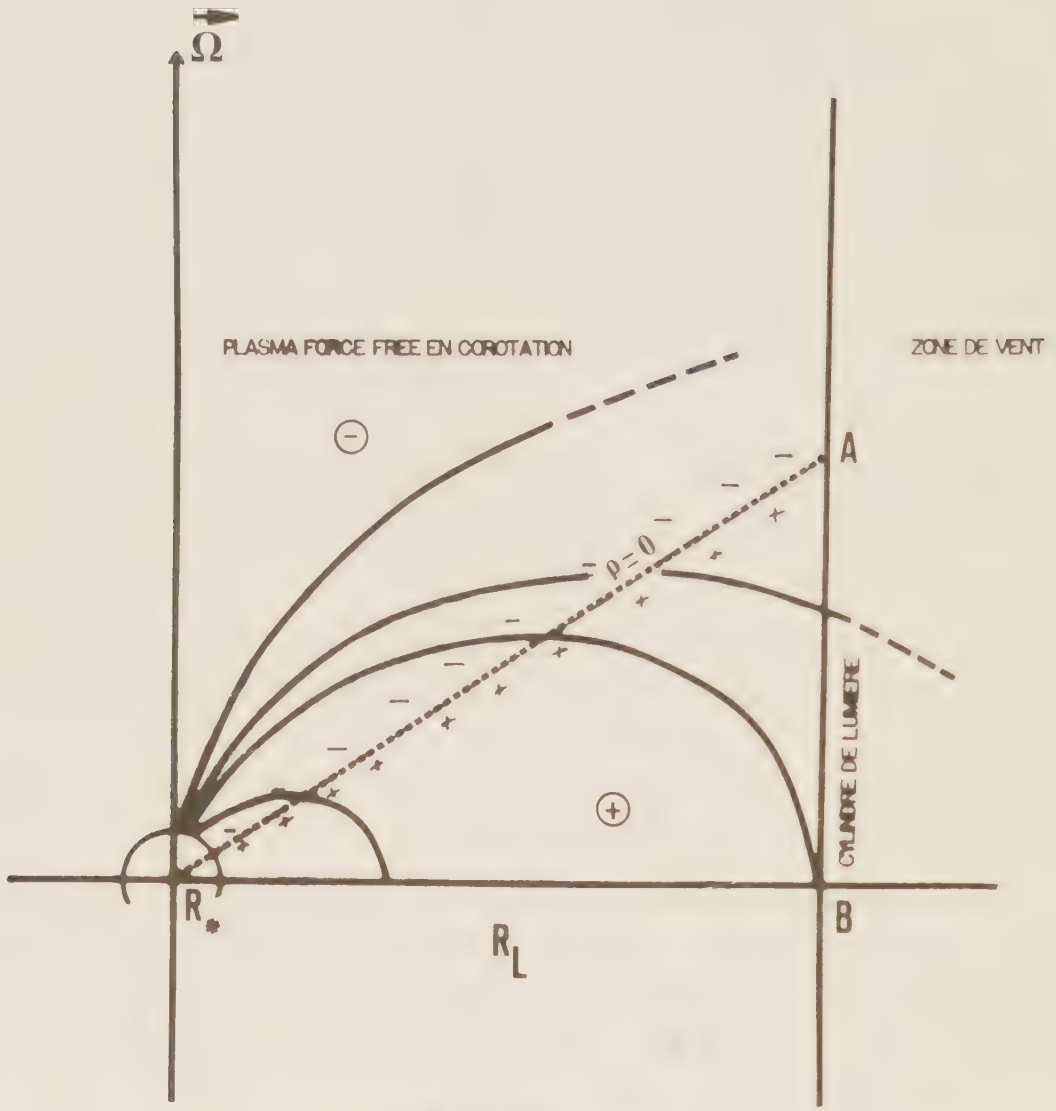


Fig. 2

Configuration des lignes de champ magnétique dipolaire à l'intérieur du cylindre de lumière. La ligne pointillée indique la séparation entre les zones de densité de charge négative et positive du plasma magnétosphérique proposé par Goldreich et Julian. Sur la partie du cylindre de lumière comprise entre A et B des particules positives peuvent s'échapper et être compensées par des particules positives émises par l'étoile dans une région de densité négative.

l'intense champ électrique qui y règne renforce l'énergie de liaison des ions positifs (Ruderman, Sutherland 1975).

2 - Si les particules qui arrivent au voisinage du cylindre de lumière s'échappent effectivement du plasma, deux phénomènes peuvent se produire :

a) La perte des particules peut être compensée par une émission de particules à la surface de l'étoile. Dans ce cas les particules positives qui quittent le plasma en suivant les lignes magnétiques passant entre A et B (Fig. 2), doivent être compensées par des particules positives émises par l'étoile dans une zone de plasma chargé négativement. (Fig. 2)

b) S'il n'y a pas d'émission de particules par l'étoile, le plasma qui n'est pas contenu dans les lignes fermées va se détacher de l'étoile et créer une zone de vide au dessus de la calotte polaire. Une telle zone de vide entre deux zones de plasma est nommée un gap. Ce gap grandira jusqu'à ce qu'un processus de décharge dans le vide arrête le phénomène. (Ruderman, Sutherland 1975).

3 - Bien que limité par le cylindre de lumière dans la direction équatoriale, le plasma s'étend jusqu'à l'infini dans la direction axiale.

4 - Selon l'équation (18) si l'étoile est initialement neutre elle n'émet que des électrons. Donc celle-ci se charge positivement. Dans le chapitre suivant on examine dans quelle mesure cette charge est capable de limiter le flux d'électrons sortants.

*
* *

III - PLASMA MAGNETOSPHERIQUE "FORCE-FREE" D'EXTENSION FINIE

1. L'idée des particules "trappées"

A partir de la remarque 4) Jackson (1976) examine le cas où l'étoile possède une charge positive

$$Q = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{3c}$$

Nous allons reprendre son calcul mais sans préciser la valeur de la charge totale. On pose :

$$Q = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{c} q \qquad (22)$$

On suppose l'étoile placée dans le vide où règne un champ magnétique dipolaire. Le potentiel électrique du vide Φ^v, convergent à l'infini est donné de façon générale, à une constante près par (15).

La solution cherchée est déterminée par la condition de continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la surface de l'étoile (16) et par la valeur de la charge totale (22). La solution (17) est modifiée du fait de cette charge. La nouvelle solution s'écrit :

$$\Phi^v = \frac{\Omega_* B_0 R_*^2}{c} \left[q \frac{R_*}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 P_2(\cos\theta) \right] \qquad (23)$$

Un tel potentiel engendre aussi un champ électrique $\vec{E}^v$ dont la composante le long des lignes de champ magnétique est en général non nulle. L'expression (18) est aussi changée.

$$\vec{E}^v \cdot \vec{B}_d (R_*, \theta) = \frac{\Omega_* B_0^2 R_*}{c} \left[q - \cos^2\theta \right] \cos\theta \qquad (24)$$

Tant que $q \in]0,1[$ il existe un angle $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ pour lequel $\vec{E}^v . \vec{B}$ est nul.

Si $0 < \theta \leq \theta_0$, $E.B < 0$, les électrons de la surface sont soumis à une force dirigée vers l'extérieur de l'étoile.

Si $\theta_o \leq \theta < 90°$, $\vec{E}^v.\vec{B} > 0$. Ce sont les particules positives qui sont soumises à une force dirigée vers l'extérieur de l'étoile.

Jackson (1976) choisit $q = 1/3$ ce qui implique $\theta_o = 54°7$. C'est la valeur de l'angle pour laquelle la densité de charge dans la zone périphérique de l'étoile, que l'on suppose donnée par (9), s'annule.

Si les charges positives sont fortement liées à la surface de l'étoile et que le champ électrique du vide n'est pas suffisant pour les extraire, on peut imaginer la configuration qui correspond aux valeurs de q supérieur ou égale à 1, l'étoile étant entourée de vide. Mais une telle configuration crée un champ électrique au voisinage de l'étoile suffisamment intense pour créer une avalanche de particules par création de paires en cascade (Ruderman, Sutherland 1975). Elle peut toutefois être envisagée pour des étoiles dont la vitesse de rotation est très faible. Ceci pourrait correspondre à ce qu'on appelle un pulsar "mort" : c'est à dire être l'état dans lequel celui-ci ne rayonne plus : seule reste une étoile en rotation lente (la diminution de la vitesse angulaire étant liée à la perte d'énergie par rayonnement).

Si $q < 1$ l'étoile va émettre des électrons par les zones polaires de sa surface ($0 \leq \theta < \theta_o$). Mais la charge positive de l'étoile devenant prépondérante suffisamment loin, va freiner les électrons. La limite au delà de laquelle les électrons en mouvement le long des lignes de champ magnétique sont freinés est la surface $r_o(\theta)$ sur laquelle le produit scalaire :

$$\vec{E}^v.\vec{B}_d = \frac{\Omega_* B_o^2 R_*}{c}\left[q - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2 \cos\theta\right]\left(\frac{R_*}{r}\right)^5 \cos\theta \qquad (25)$$

s'annule.

Donc

$$r_o(\theta) = R_* \frac{\cos\theta}{\cos\theta_o}$$

C'est une sphère centrée sur l'axe et qui passe par le centre de l'étoile ; le diamètre de cette sphère est $R_*/\cos\theta_o$ (voir Fig. 3).

Si $\theta < \theta_o$ le champ électrique accélère les électrons tant que $r < r_o(\theta)$. Pour $r > r_o(\theta)$ le champ électrique freine les électrons.

Si les électrons peuvent revenir vers l'étoile, c'est à dire s'ils peuvent être suffisamment freinés pour s'arréter et donc ensuite être accéléré en sens inverse, un tel potentiel conduit donc à une accumulation de ces particules au voisinage de la surface $r = r_o(\theta)$. Cette surface correspond en effet à un minimum d'énergie potentielle pour les électrons, et ils s'y accumulerons du fait de leur perte d'énergie (par rayonnement par exemple).

Il est donc intéressant de savoir à quelle distance les électrons seraient arrétés (puis accélérés en sens inverse) s'ils suivaient les lignes de champ magnétique sans perdre d'énergie.

A cette distance, le potentiel sur une ligne de champ est revenu à la valeur qu'il avait sur l'étoile au pied de cette ligne de champ.

L'équation des lignes de champ dipolaire s'écrit

$$\frac{\sin^2\theta}{r} = \frac{\sin^2\theta_*}{R_*} \qquad (26)$$

(r, θ) sont les coordonnées dans le plan méridien d'un point P. Par ce point passe une ligne de champ qui coupe l'étoile en un point M de coordonnées (R_*, θ_*).

Lorsqu'on égale la valeur du potentiel au point P à celle du potentiel au point M on obtient l'équation :

$$\frac{1}{r}\left[q - \frac{1}{6}\left(\frac{R_*}{r}\right)^2\left(2 - 3\sin^2\theta\right)\right] = \frac{1}{R_*}\left[q - \frac{1}{6}\left(2 - 3\sin^2\theta_*\right)\right]$$

qui, compte tenu de (26) peut se réécrire sous la forme :

$$(3q-1)\left(1 - \frac{r}{R_*}\right) = \left(\frac{3}{2}\sin^2\theta - 1\right)\left(1 - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2\right)$$

soit pour $r \neq R_*$

$$\frac{3}{2}\sin^2\theta - 1 = (3q-1)\,\frac{1 - r/R_*}{1 - (R_*/r)^2} \qquad (27)$$

Pour $r = R_*$: $\theta = \theta_o$

Dans le cas étudié par Jackson (1976) q = 1/3. L'équation (27) se réduit à $\theta = \theta_o = 54°7$. Les électrons qui quittent l'étoile ne peuvent donc franchir le cône $\theta = 54°7$ où ils sont réfléchis.

Lorsque $q \neq 1/3$ la surface définie par (27) est une surface fermée.
Pour $0 < q < 1/3$ la surface est constituée d'une nappe et a une forme toroïdale (Fig. 3). Pour $1/3 < q < 1$ la surface est constituée de deux nappes et s'étend au dessus des pôles (Fig. 4).

Conclusion

Ceci conduit à penser que, si les ions positifs ne sortent pas de l'étoile, la zone équatoriale ne doit pas se remplir. Plus encore, elle doit se vider et s'aggrandir au fur et à mesure de la perte d'électrons par les zones polaires, c'est à dire au fur et à mesure de l'augmentation de la charge positive de l'étoile. Ceci aura lieu jusqu'à ce que cette charge dépasse la valeur $Q_1 = \frac{\Omega_* B_o R_*^3}{3c}$ au delà de laquelle la surface de réflexion se ferme au dessus des pôles et donc empêche les électrons de quitter la magnétosphère du pulsar. Plus précisément il faut que la charge de l'étoile soit telle que cette surface se ferme à l'intérieur du cylindre de lumière, soit :

$$Q \geq \frac{\Omega_* B_o R_*^3}{c} \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{27} \frac{R_*}{R_L} \right)$$

Cette surface ne peut avoir de réalité physique que si elle n'est pas trop éloignée de l'étoile. En effet, les électrons peuvent avoir à parcourir une longue distance (sur les lignes proches de l'axe) et perdre de l'énergie par rayonnement, donc être réfléchis avant d'atteindre cette limite. Cependant, ce calcul montre que contrairement à l'idée de Jackson (1976), les électrons n'ont pas nécessairement à atteindre des régions très éloignées de l'étoile (au delà du cylindre de lumière) et à former des boucles à travers les lignes de champ magnétique, pour retourner vers l'étoile.

Les calculs faits dans ce paragraphe en supposant l'étoile entourée de vide ne peuvent rester valables que si la densité de charge magnétosphérique reste très faible. En fait le courant

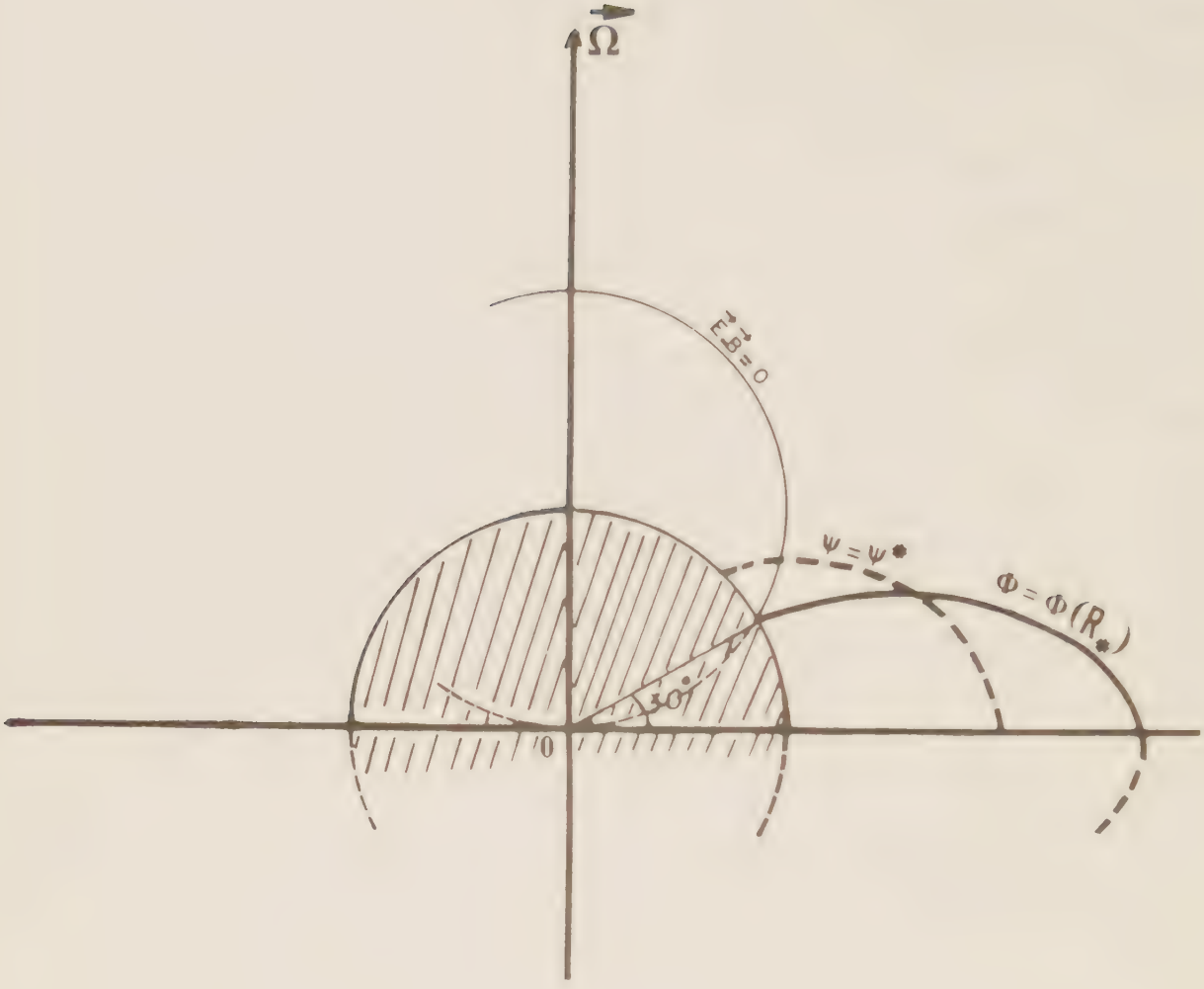


Fig. 3

Etoile possédant une charge $Q = \frac{1}{4}\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{c}$. La ligne en pointillés est une ligne de champ magnétique dipolaire. La ligne pleine partant du point (R_* , $\theta_0 = 60°$) et coupant l'équateur est une ligne limite : sur une ligne de champ qui la coupe, le potentiel électrique à l'intersection est le même que celui qui existe sur l'étoile au pied de cette ligne de champ. Un électron émis par l'étoile sur une telle ligne de champ est donc réfléchi sur cette ligne limite. La ligne $\vec{E}.\vec{B} = 0$ sépare les zones d'accélération et de freinage des électrons émis par l'étoile.

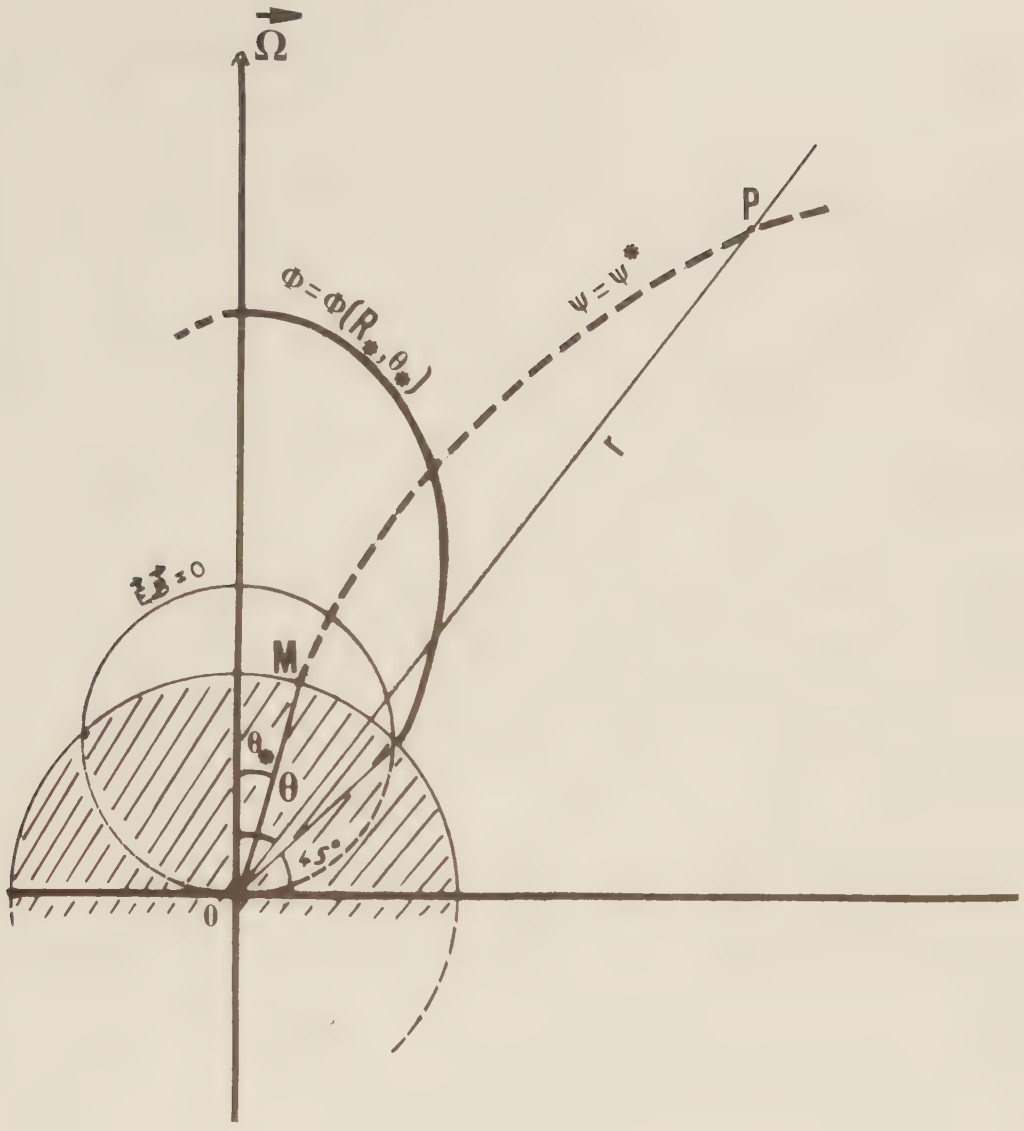


Fig. 4

Etoile possédant une charge $Q = \frac{1}{2} \frac{\Omega_* B_* R_*^3}{c}$. Un électron émis par la zone polaire de l'étoile est accéléré le long d'une ligne de champ jusqu'à ce qu'il franchisse la limite $\vec{E}.\vec{B} = 0$. Au delà il est freiné et sera stoppé sur la ligne $\Phi = \Phi_*(R_*, \theta_*)$ puis retournera vers l'étoile. Ces deux lignes touchent l'étoile au point (R_* , $\theta_0 = 45°$).

d'émission des électrons augmente rapidement jusqu'à ce que la charge d'espace engendrée limite l'émission. (space charge limited flow). D'après le résultat de Goldreich et Julian la densité de charge nécéssaire doit être proche de ρ_{GJ} (21). De tels modèles seront étudiés au chapitre IV. Dans la suite de ce chapitre nous chercherons s'il est possible que des électrons piégés dans la magnétosphère puissent créer un plasma magnétosphérique capable d'empécher l'émission d'électrons supplémentaires par l'étoile. En effet, la présence d'électrons accumulés dans une région de la magnétosphère, va modifier considérablement la configuration du potentiel électrique du vide.

2. La solution divergente de Michel

A ce point du travail il est intéressant d'étudier une solution pour le potentiel du vide proposée par Michel (1980). Cette solution n'est pas acceptable physiquement car le potentiel diverge à l'infini, mais met en évidence des propriétés remarquables.

La difficulté rencontrée dans les modèles précédents provient de l'existence d'un champ électrique parallèle aux lignes de champ à la surface de l'étoile. On peut chercher un potentiel du vide Φ^V tel que $\vec{E}^V.\vec{B}$ soit nul à la surface de l'étoile. Une telle solution, qui assure donc la continuité du champ électrique, existe mais contient un terme qui diverge lorsque r tend vers l'infini :

$$\Phi^V = \frac{\Omega_* B_0 R_*^2}{c}\left[\frac{1}{3}\frac{R_*}{r} - \frac{1}{15}\left(3\left(\frac{R_*}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{r}{R_*}\right)^2\right)P_2(\cos\theta)\right] \qquad (28)$$

La configuration des équipotentielles de cette solution est montrée dans la figure 5.

La charge totale de l'étoile est $\Omega_* B_0 R_*^2 / 3c$. Ceci est en accord avec la valeur (11) ; la continuité du champ électrique assure l'inexistence de charges de surface . Il n'y a donc pas de courant de surface non plus. Le champ magnétique est donc continu à travers la surface stellaire, et dipolaire dans la zone périphérique de l'étoile.

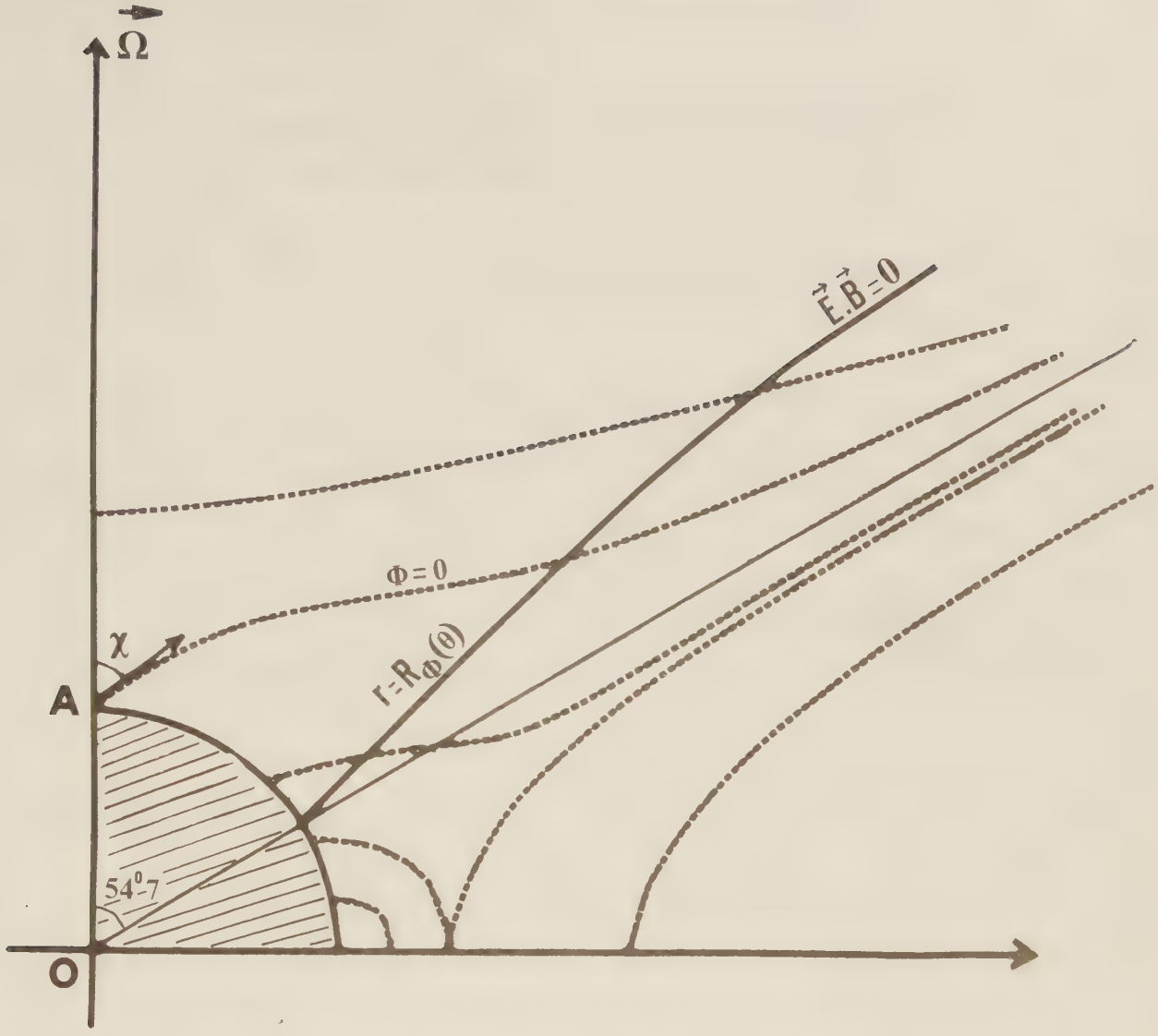


Fig. 5

Configuration des lignes équipotentielles du potentiel

$$\Phi^V = \frac{\Omega_* B_0 R_*^2}{c}\left[\frac{1}{c}\frac{R_*}{r} - \frac{1}{15}\left(3\left(\frac{R_*}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{r}{R_*}\right)^2\right) P_2(\cos\theta)\right]$$

Ce potentiel assure la condition $\vec{E}.\vec{B} = 0$ à la surface de l'étoile, mais est divergent à l'infini. Il possède une seconde surface "force-free" qui s'étend à l'infini. La ligne $\Phi^V = 0$ qui part du pôle (point A) forme avec l'axe un angle $\chi = \text{arctg } 1/\sqrt{2}$.

Cette solution appelle plusieurs remarques intéressantes :

1) Pour assurer à la surface de l'étoile la condition $\vec{E}^v.\vec{B} = 0$ et la continuité de la composante tangentielle du champ électrique (16) il faut supposer la présence de charges extérieures à l'étoile. Si la solution (28) s'étend à tout l'espace autour de l'étoile, les charges sont à l'infini. Mais les charges peuvent être à distance finie de l'étoile et délimiter un domaine fermé dans lequel (28) s'applique.

2) En ce qui concerne la configuration des lignes équipotentielles, on remarque que la ligne $\Phi^v = 0$, qui part du pôle, forme un angle $\chi = \text{arctg } 1/\sqrt{2}$ avec l'axe de rotation. Cette circonstance particulière est due à ce que la condition $\vec{E}^v.\vec{B} = 0$, du fait de la symétrie de révolution, impose au champ électrique d'être nul au pôle. Une telle circonstance se rencontrera donc pour toute surface à $\vec{E}^v.\vec{B}$ nul qui coupe l'axe, et ce quelque soit le champ magnétique axisymétrique.

3) Le potentiel, pour $\theta = 54°7$ se réduit à

$$\Phi^v\left(r, \theta = 54°,7\right) = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{3c} \frac{1}{r}$$

C'est le potentiel du plasma magnétosphérique de Goldreich et Julian sur la ligne de densité de charge nulle. En fait ceci n'est qu'une conséquence de la nature sphérique de la surface de l'étoile sur laquelle on a imposé $\vec{E}.\vec{B} = 0$.

4) Ce potentiel (28) possède une seconde surface où $\vec{E}.\vec{B} = 0$, indiquée sur la figure 5 ($r = R_\Phi(\theta)$).
Michel propose d'utiliser cette surface en tant que séparation entre le vide et un plasma "force-free". Pour des raisons évidentes de continuité du potentiel, un tel plasma ne peut occuper que le volume équatorial déterminé par les deux nappes $\vec{E}.\vec{B} = 0$, symétriques par rapport au plan équatorial. De cette façon la condition

$$\rho\left(\vec{E}.\vec{B}\right) = 0$$

est valable dans tout l'espace :

dans le vide $\rho = 0$

dans le plasma $\vec{E}.\vec{B} = 0$

Une telle surface de séparation où $\vec{E}.\vec{B} = 0$ est appelée par Michel "force-free surface". (Voir aussi C. Michel et R. Pellat 1981).

5) Un tel plasma n'est pas acceptable puisqu'il s'étend à l'infini ; mais son étude permet de mettre en évidence le point remarquable suivant :

Le potentiel électrique ne peut être continu au passage de la surface "force-free" que si le plasma est en rotation différentielle. En effet pour chaque ligne de champ magnétique équipotentielle dans le plasma, le potentiel est fixé par continuité avec le potentiel du vide pour $r = R_\phi(\theta)$, et la vitesse angulaire est directement liée au potentiel par des relations du type (13) et (14). Les lignes de champ n'étant pas équipotentielles dans le vide, la vitesse de rotation du plasma, pour chaque ligne de champ, diffère de celle du plasma stellaire.

3. Le résultat de Pilipp

A priori le résultat de Michel n'exclut pas l'existence d'une surface "force-free" non sphérique qui séparerait un plasma en corotation (qui inclut l'étoile), du vide qui s'étend à l'infini.

Soit $r = R_\phi(\theta)$ une telle surface. Les conditions imposées sur une telle surface sont :

1) La continuité du potentiel (champ magnétique dipolaire)convergent à l'infini

$$\Phi^V\left(R_\phi(\theta)\right) = \sum_{\ell \text{ pair}} \frac{b_\ell}{R_\phi^{\ell+1}(\theta)} P_\ell(\cos\theta) = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c} \frac{\sin^2\theta}{R_\phi(\theta)} + \text{cste}$$

2) la condition "force-free" $\vec{E}^V.\vec{B} = 0$, qui s'écrit

$$\sum_{\ell \text{ pair}} \left\{ -\frac{(\ell+1) b_\ell}{R_\phi^{(\ell+2)}(\theta)} P_\ell(\cos\theta).\cos\theta + \frac{b_\ell}{R_\phi^{\ell+2}(\theta)} \frac{dP_\ell}{d\theta} \frac{\sin\theta}{2} \right\} = 0$$

La sommation étant restreinte aux valeurs paires de ℓ puisque par symétrie équatoriale les expressions doivent être invariantes par changement de θ en $\pi - \theta$. Un tel système d'équations est impossible à résoudre.

D'une façon totalement différente, Pilipp (1974) a montré qu'aucun potentiel convergent du vide ne pouvait être continu et assurer la condition force-free sur une surface limitant un plasma force-free en corotation, pour tout champ magnétique axisymétrique non-nul.

Sa démonstration utilise le théorème de Green :

$$\int_{\mathcal{V}} (p\,\Delta q - q\,\Delta p)\,d\upsilon = \int_{S} (p\,\vec{\mathrm{grad}}\,q - q\,\vec{\mathrm{grad}}\,p)\,d\vec{S} \qquad (29)$$

p et q sont deux fonctions quelconques des coordonnées et $\mathcal{V}$ est le volume limité par la surface S.

Nous allons reprendre la démonstration dans le cas du champ magnétique dipolaire en choisissant pour p et q les fonctions :

$$p = \Delta\psi \qquad \text{et} \qquad q = \Phi^{VIDE} = \Phi^{V}$$

Ce choix permet d'annuler l'intégrale de volume du premier membre de (29) si le volume d'intégration est le vide s'étendant d'une surface force-free jusqu'à l'infini. En effet dans le vide $\Delta\Phi^{V} = 0$ et $\Delta\Delta\psi = 0$. Cette dernière équation est évidente à la suite de la remarque 3) page 4, puisque dans le vide $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$.

L'intégrale de surface du second membre se scinde en deux intégrales l'une sur la surface "force-free", l'autre sur une surface rejetée à l'infini. Si on cherche une solution convergente pour le potentiel Φ^{V} la contribution de l'intégrale de surface est nulle à l'infini.

Donc (29) se réduit à

$$0 = \int_{S_\Phi} (\Delta\psi\,\vec{\mathrm{grad}}\,\Phi^{V} - \Phi^{V}\,\vec{\mathrm{grad}}\,\Delta\psi)\,d\vec{S} \qquad (30)$$

La continuité du potentiel et du champ électrique s'écrivent

$$\Phi^v(R_\phi(\theta)) = \frac{\Omega_*}{c}\psi(R_\phi(\theta)) + \text{cste}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi^v(R_\phi(\theta)) = \frac{\Omega_*}{c}\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi(R_\phi(\theta))$$

Donc de (30) on déduit

$$0 = \int_{S_\phi}(\Delta\psi\,\overrightarrow{\text{grad}}\psi - \psi\,\overrightarrow{\text{grad}}\Delta\psi)\,d\vec{S} + \text{cste} \times \int_{S_\phi}\overrightarrow{\text{grad}}\Delta\psi.d\vec{S}$$

La dernière intégrale étant nulle :

$$\int_{S_\phi}\overrightarrow{\text{grad}}\,\Delta\psi\,d\vec{S} = \int_{S_\phi+S_\infty}\overrightarrow{\text{grad}}\,\Delta\psi\,d\vec{S} = \int_{\text{VIDE}}\Delta\Delta\psi\,dv = 0$$

La première se réduit à

$$\int|\Delta\psi|^2\,dv$$

Donc on doit avoir

$$\int|\Delta\psi|^2\,dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi = 0 \quad \text{dans tout le vide}$$

ce qui est impossible.

Conclusion

Donc il ne peut y avoir de surface "force-free" limitant un plasma en corotation. De façon plus générale on peut conclure que les deux conditions 1) et 2) page (18) ne peuvent être assurées par un potentiel convergent à l'infini. En d'autres termes : s'il existe un plasma "force-free" d'extension finie, celui-ci est nécessairement en rotation différentielle (voir remarque 5) page 18). C'est à dire encore que s'il existe un plasma "force-free" situé au-dessus de la calotte polaire de l'étoile à neutrons, celui-ci n'est pas connecté directement à l'étoile par les lignes de champ magnétique. (Rappelons que le modèle d'étoile adopté ici est celui d'un plasma parfaitement conducteur ; Jackson (1980), (1981), étudie la possibilité d'une croûte stellaire possédant une résistivité).

Dans un premier temps on a donc cherché si une zone de vide ne pouvait pas séparer le plasma magnétosphérique de l'étoile ; autrement dit si un gap (évoqué dans la remarque 2.2 p. ( )) peut exister. En second lieu on a cherché si des faisceaux de particules chargées pouvaient contribuer à un plasma magnétosphérique.

4. Inexistence d'un gap séparant l'étoile d'un plasma magnétosphérique "force-free"

Nous examinons dans ce paragraphe si une zone de vide (gap) peut séparer le plasma magnétosphérique (aui ne peut être en corotation avec l'étoile), du plasma stellaire (Fig. 6).

Un tel gap ne peut avoir qu'une épaisseur très faible. En effet Ruderman et Sutherland (1975) on a montré qu'au delà d'une hauteur de l'ordre de 10^{-2} R_* , le gap devient instable car un phénomène d'avalanche par création de paires électrons-positrons peut avoir lieu. D'autre part, puisque ce gap sépare deux régions de plasma "force-free", le potentiel électrique du vide qui règne dans le vide doit être limité par deux surfaces "force-free" pour que la continuité du champ électrique soit assurée (on suppose toujours l'absence de charge de surface). On sait d'après la solution de Michel que le gap ne peut être limité inférieurement par l'étoile elle-même. La solution exacte du potentiel, calculable seulement dans ce cas, montre qu'il n'existe pas de seconde surface "force-free" fermée. Cette impossibilité se traduit au voisinage du pôle par le comportement des équipotentielles et plus précisément par la présence d'une pointe, que forme avec l'axe, la ligne de potentiel qui part du pôle (Fig. 5).

Nous montrons ici que ce comportement au voisinage du pôle est independant de la forme de la surface si celle-ci ne présente pas de singularité au point A (Fig. 6).

On utilise un développement de Taylor du potentiel du vide Φ^V régnant dans le gap :

$$\Phi^V = \Phi_0 + r_0\left(\frac{r}{r_0}-1\right)\frac{\partial\Phi^V}{\partial r}\Big|_0 + \theta\,\frac{\partial\Phi^V}{\partial\theta}\Big|_0$$

$$+ \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{r}{r_0}-1\right)^2\frac{\partial^2\Phi^V}{\partial r^2}\Big|_0 + r_0\left(\frac{r}{r_0}-1\right)\theta\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta}\Big|_0 + \frac{1}{2}\theta^2\frac{\partial^2\Phi^V}{\partial\theta^2}\Big|_0 + \dots$$

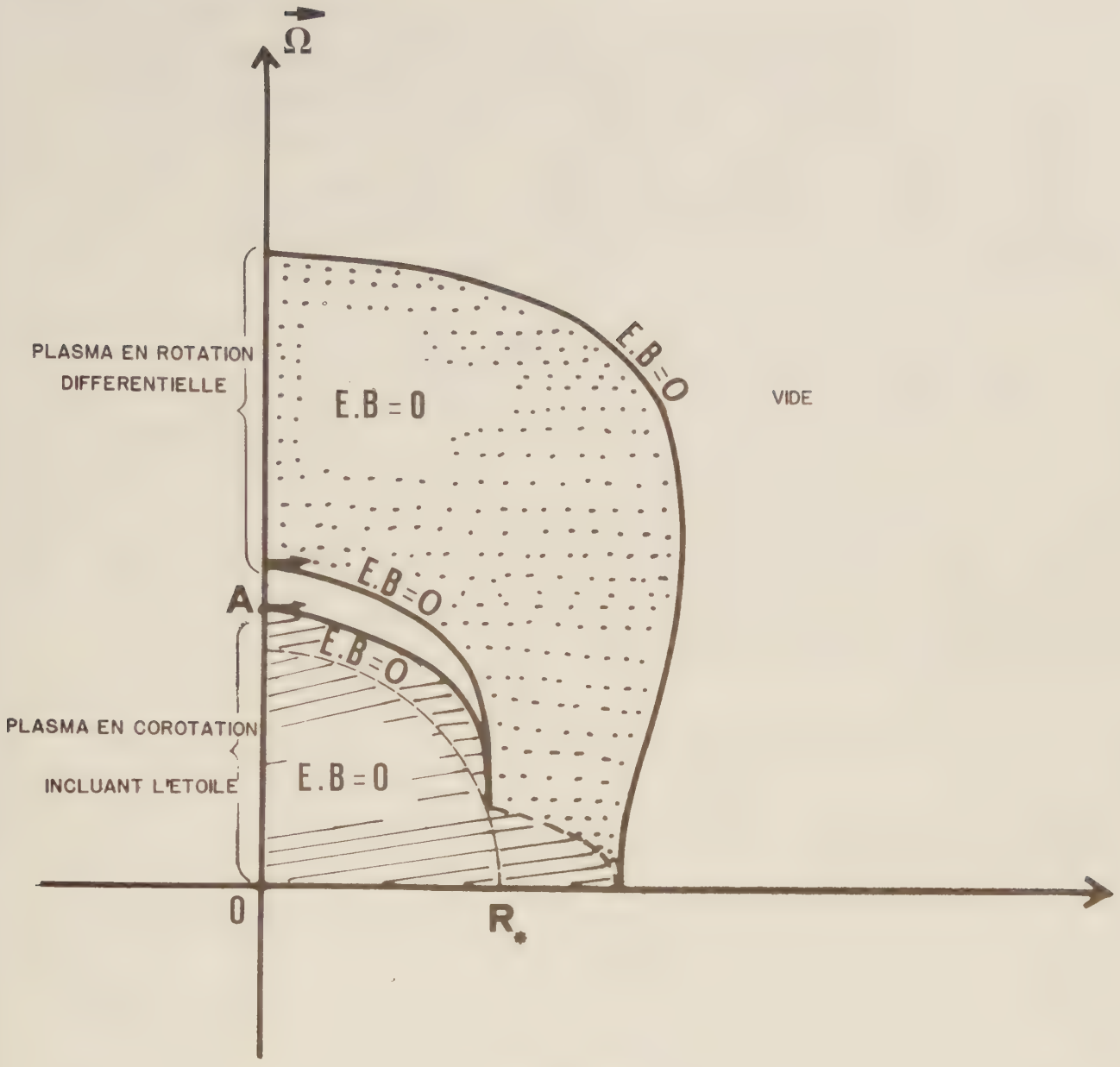


Fig. 6

Configuration recherchée pour séparer par une zone de vide (gap) le plasma magnétosphérique "force-free" du plasma en corotation contenant l'étoile. La hauteur du gap ne doit pas dépasser une valeur critique de l'ordre de 10^{-2} R_* au delà de laquelle celui-ci serait instable vis à vis des créations en avalanche de paires électrons-positrons.

Le potentiel intérieur au plasma en corotation est donné par (13) et (14) dans le cas du champ magnétique dipolaire. Dans ce calcul nous choisissons la constante de l'expression (13) égale à zéro. La continuité du potentiel impose alors $\Phi_0 = 0$. Le champ électrique au point A doit être nul donc $\frac{\partial \Phi^v}{\partial r}\Big|_0$ et $\frac{\partial \Phi^v}{\partial \theta}\Big|_0$ sont nuls. Si on tient compte de plus de la symétrie axiale, on ne garde que les termes d'exposant pair en θ d'où

$$\Phi = a\left(\frac{r}{r_0}-1\right)^2 + b\theta^2 + d\left(\frac{r}{r_0}-1\right)^3 + f\theta^2\left(\frac{r}{r_0}-1\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r}{r_0}-1\right)^4, \theta^4\right) \qquad (31)$$

Pour écrire la condition de continuité du potentiel et de la composante radiale du champ électrique, nous utilisons un développement pour θ petit de l'expression $r = r_s(\theta)$ de la surface "force-free" limitant le plasma en corotation :

$$r_s = r_0\left(1 + \delta\theta^2\right) \qquad (32)$$

δ est le paramètre lié à la courbure de la surface.
Sur cette surface le potentiel doit être

$$\Phi^v(r_s) = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c}\,\frac{\sin^2\theta}{r_s}$$

Le développement (31) n'étant étendu qu'à l'ordre 2 en θ .

$$\Phi^v(r_s) \simeq \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c}\,\frac{\theta^2}{r_0}$$

D'où $$b = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c}\right) \qquad (33)$$

Sur cette surface le champ électrique radial est

$$\frac{\partial \Phi^v}{\partial r}(r_s) = -\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c}\,\frac{\sin^2\theta}{r_s^2}$$

Du développement (31) on déduit

$$\frac{\partial \Phi^v}{\partial r} = \frac{1}{r_0}\left[2a\left(\frac{r}{r_0}-1\right) + 3d\left(\frac{r}{r_0}-1\right)^2 + f\theta^2\right] \qquad (34)$$

sur la surface $r = r_s(\theta)$ on a donc d'après (32)

$$\frac{r}{r_0} - 1 = \delta\theta^2$$

A l'ordre 2 en θ on a donc :

$$\frac{1}{r_0}\left[2a\delta + f\right]\theta^2 = -\frac{5\Omega_* B_0 R_*^3}{2c}\frac{\theta^2}{r_0^2}$$

Soit

$$2a\delta + f = -\frac{1}{r_0}\frac{5\Omega_* B_0 R_*^3}{2c} \qquad (35)$$

Le développement (31) est celui d'un potentiel du vide. Il doit donc vérifier l'équation de Laplace. Pour θ petit :

$$\Delta\Phi^v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi^v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta\frac{\partial \Phi^v}{\partial \theta}\right) = 0$$

Soit encore

$$\frac{\partial^2 \Phi^v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi^v}{\partial r} + \frac{1}{r^2\theta}\frac{\partial \Phi^v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi^v}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (36)$$

De l'expression (31) on déduit

$$\frac{\partial^2 \Phi^v}{\partial r^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(2a + 6d\left(\frac{r}{r_0}-1\right)\right)$$

$$\frac{\partial \Phi^v}{\partial \theta} = 2b\theta + 2f\left(\frac{r}{r_0}-1\right)\theta \qquad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^v}{\partial \theta^2} = 2b + 2f\left(\frac{r}{r_0}-1\right)$$

L'ordre maximal en $(\frac{r}{r_0} - 1)$ est donc fixé à 1. L'ordre en θ est donc fixé à 0.

Donc (36) s'écrit :

$$\frac{1}{r_0^2}\left[2a + 6d\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\right] + \frac{2}{r_0^2}\left[2a\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{r_0^2}\left[1 - 2\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\right]\left[2b + 2f\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{r_0^2}\left[1 - 2\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\right]\left[2b + 2f\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\right] = 0$$

On en déduit

$$a = -2b$$

et

$$6d + 4a - 8b + 4f = 0$$

Donc compte tenu de (32) et (33) :

$$a = -\frac{2}{r_0}\left(\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2C}\right)$$

$$f = \frac{1}{r_0}(4\delta - 1)\left(\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2C}\right) \qquad (38)$$

$$d = \frac{1}{3r_0}(10 - 8\delta)\left(\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2C}\right)$$

A l'ordre le plus bas, l'équation de la ligne équipotentielle $\Phi^V = 0$, s'écrit :

$$\frac{r}{r_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta$$

l'angle χ entre cette ligne et l'axe de rotation est donc bien, au point A :

$$\chi = \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2} \simeq 35° 26$$

Cherchons maintenant si le champ électrique correspondant à ce potentiel peut s'annuler en un point B de l'axe au-dessus du pôle A.

L'expression (34) montre qu'un tel point se trouve à la distance

$\varepsilon = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)$ de A :

$$\varepsilon = -\frac{2a}{3d} = \frac{2}{5 - 4\delta} \tag{39}$$

Pour que ce point B puisse appartenir à la seconde surface "force-free" limitant un gap il faut que $\varepsilon < 10^{-2}$.

Ceci impose $|\delta| \geq 48{,}75$, $\delta < 0$.

Une telle valeur correspond à une courbure assez forte, et limite le développement à des angles très petits.

Si $\delta = 50$: $\frac{r_s}{r_0} - 1 \ll 1 \Rightarrow \theta \ll 8°$.

Cherchons maintenant qu'elle est la courbure d'une surface "force-free" passant par le point B. Soit

$$r'_s = r_1 \left(1 + \delta' \theta^2\right) \tag{40}$$

le développement au 2ème ordre en θ de l'équation de cette surface.
avec :

$$r_1 = r_0 \left(1 + \varepsilon\right)$$

La condition $\vec{E}.\vec{B} = 0$, s'écrit d'après (31), (34), (37) et (6)

$$\frac{1}{r_0}\left[2a\left(\frac{r'_s}{r_0} - 1\right) + 3d\left(\frac{r'_s}{r_0} - 1\right)^2 + f\theta^2\right]\cos\theta + \frac{1}{r}\left[2b\theta + 2f\left(\frac{r'_s}{r_0} - 1\right)\theta\right]\frac{\sin^2\theta}{2} = 0$$

Soit, d'après (40)

$$\left[2a\left(\frac{r'_s}{r_0} - 1\right) + 3d\left(\frac{r'_s}{r_0} - 1\right)^2 + f\theta^2\right]\left[1 - \frac{\theta^2}{2}\right]$$

$$+ \left[1 - \delta'\theta^2\right]\frac{r_0}{r_1}\left[2b + 2f\theta\left(\frac{r'_s}{r_0} - 1\right)\right]\frac{\theta}{2} = 0$$

où

$$\frac{r'_s}{r_0} - 1 \simeq \varepsilon + (1+\varepsilon)\delta'\theta^2$$

$$\left(\frac{r'_s}{r_0} - 1\right)^2 \simeq \varepsilon^2 + 2\delta'\theta^2(1+\varepsilon)\varepsilon$$

En ne gardant que les termes du premier ordre en ε et en tenant compte de (39). La condition "force-free" s'écrit :

$$\left[\delta'\left(2a(1+\varepsilon) + 6d\varepsilon\right) + b(1-\varepsilon) + f(1+\varepsilon)\right]\theta^2 = 0$$

on en déduit

$$\delta' = \frac{-b(1-\varepsilon) - f(1+\varepsilon)}{2a(1+\varepsilon) + 6d\varepsilon}$$

Soit

$$\delta' \simeq \frac{b+f}{2a}$$

et d'après (33) et (38) : $\delta' \simeq -\delta$

Les deux surfaces "force-free" doivent avoir leur concavité tournées dans des directions opposées. La hauteur du gap augmente donc lorsqu'on s'écarte de l'axe. La valeur importante des courbures $|\delta'| \simeq |\delta| \geqslant 50$ nous permet de conclure à l'impossibilité d'existence d'un gap. En effet à des angles très faibles, mais non nuls, la hauteur du gap serait plus grande que la hauteur maximale possible. Prenons par exemple : pour un angle tel que

$$\delta'\theta^2 \simeq |\delta\theta^2| \simeq 5.10^{-2}$$

$$r_s = r_0\left(1 - 5\,10^{-2}\right)$$

$$r'_s = r_1\left(1 + 5\,10^{-2}\right)$$

$$\frac{r'-r}{r_0} = \varepsilon + 5.10^{-2}(2+\varepsilon) > 10^{-1}$$

Cette distance relative est donc plus grande d'un facteur 10 que la hauteur relative maximale ($\frac{h}{R_*} \simeq 10^{-2}$).

Conclusion

Si la surface "force-free" qui limite le plasma en corotation possède une courbure proche de celle de la sphère ($|\delta|$ petit), la configuration des équipotentielles, et en particulier la présence du "cusp" au point A ou l'axe perce cette surface "force-free", empêche le champ électrique de s'annuler en un point B de l'axe juste au-dessus de A. Une seconde surface force-free voisine du pôle ne peut donc exister dans ce cas.

Si la surface force-free qui limite le plasma en corotation possède une courbure suffisamment importante ($|\delta| \geqslant 50$), une seconde surface force-free existe mais ne peut limiter avec la précédente un gap stable vis à vis des créations de paire électrons-positrons.

***

IV - MODELES DE PLASMAS MAGNETOSPHERIQUES AVEC COURANTS

1. Introduction

D'après ce qui précède, la condition $\vec{E}.\vec{B} = 0$ qui permet l'absence d'émission de particules chargées ne peut être assurée sur une surface séparant un plasma en corotation du vide. Inversement, l'existence d'un champ électrique capable d'extraire des particules chargées va donc créer un courant qui va augmenter rapidement jusqu'à ce que la charge d'espace qui en résulte limite elle-même l'émission (space charge limited flow). A l'état stationnaire l'émission se fait à partir de la surface où $\vec{E}.\vec{B}$ est nul. Nous nous intéresserons au cas de l'émission de particules par la surface de l'étoile. Juste au-dessus de la surface stellaire il y a donc une zone d'accélération qui est de très faible épaisseur. Dans cette zone les particules de vitesse initiale nulle à la surface de l'étoile, sont accélérées jusqu'à une vitesse proche de celle de la lumière. Au delà de cette zone la magnétosphère est donc occupée par des faisceaux de particules relativistes. Cette idée a été développée par Fawley, Arons Scharleman (1977) et Scharleman, Arons, Fawley (1978), qui ont cherché si les particules chargées (électrons dans le cas du rotateur aligné) ainsi émises par l'étoile dans le tube des lignes ouvertes d'un champ magnétique dipolaire, pouvaient quitter la magnétosphère.

Dans un premier paragraphe nous résumons leurs calculs dans le cas d'un rotateur aligné pour montrer comment les auteurs concluent qu'un tel faisceau d'électrons ne peut exister.

Dans un second paragraphe, rapprochant ce résultat de celui du paragraphe (III - 1), nous chercherons par une démarche tout à fait analogue si le plasma magnétosphérique peut être constitué de faisceaux de particules chargées, émises par l'étoile et réfléchies à distance finie.

Dans un dernier paragraphe nous étudierons comment une zone de faisceau peut permettre de relier un plasma magnétosphérique "force-free" à l'étoile, et peut-être de résoudre le problème posé par l'inéxistence de gap polaire stable.

2. L'inconsistence du modèle de Scharleman, Arons, Fawley pour le rotateur aligné

Précisons d'abord le modèle étudié : On suppose que l'émission de particules est limitée à la calotte polaire définie par les pieds des lignes ouvertes du champ magnétique dipolaire créé par l'étoile ; les lignes fermées contiennent un plasma chargé "force-free" en corotation avec l'étoile. On suppose aussi que l'émission est de type "space charge limited flow". Les électrons émis suivent les lignes de champ magnétique jusqu'à une très grande distance de l'étoile, à laquelle on considère qu'ils quittent la magnétosphère (Fig. 7).

Les calculs sont faits dans le référentiel tournant avec l'étoile. Le choix d'un tel référentiel s'impose dans le cas où l'axe magnétique est incliné par rapport à l'axe de rotation puisqu'il permet de se ramener à un problème d'électrostatique. Dans le cas du rotateur aligné l'avantage se trouve dans l'expression des conditions aux limites. Dans ce référentiel les surfaces, qui limitent l'étoile et le plasma en corotation dans les lignes de champ fermées, sont équipotentielles (la valeur de leur potentiel commun est prise égale à zéro) et l'équation de Poisson pour le potentiel du plasma s'écrit :

$$\Delta\phi^P = -4\pi\,(\eta - \eta_R) \tag{41}$$

η est la densité de charge due aux faisceaux. η_R est le terme résultant de ce que le référentiel n'est pas un référentiel d'inertie

$$\eta_R = -\frac{\vec{\Omega}_* \cdot \vec{B}}{2\pi c} + \mathcal{O}\left(\frac{\Omega^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2}\right) \tag{42}$$

Cette expression est identique aux expressions (9) ou (21) compte tenu de la condition $\Omega r \sin\theta / c \ll 1$, puisque η_R représente la densité associée au potentiel aui règne dans le plasma en corotation. Dans le référentiel d'inertie ce potentiel est

$$\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c}\,\frac{\sin^2\theta}{r} \qquad \text{(voir (13) et (14))}$$

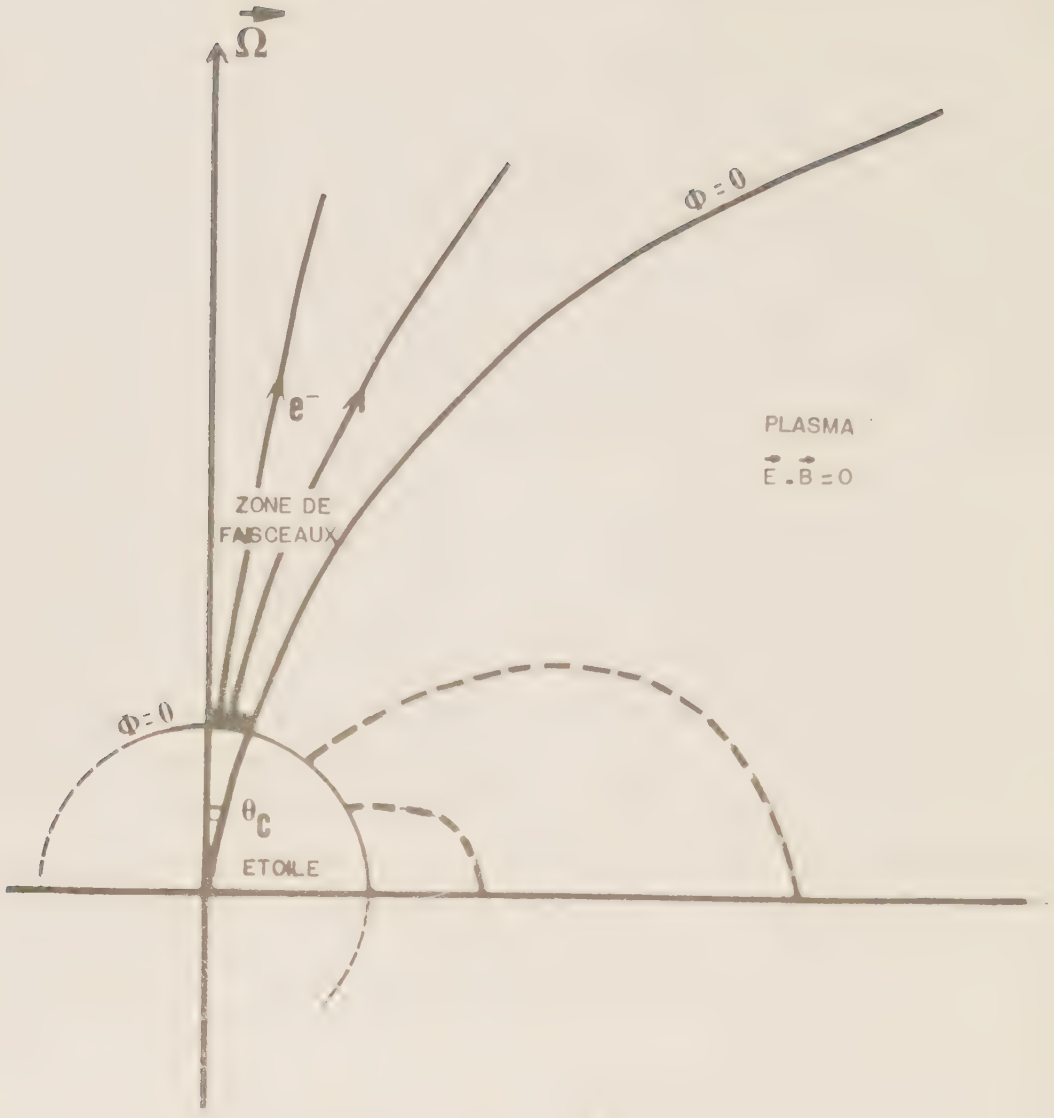


Fig. 7

Configuration proposée par Scharlemann et al. Les lignes fermées du champ magnétique dipolaire contiennent un plasma "force-free". Les lignes ouvertes sont parcourues par dès électrons émis par l'étoile et qui quittent la magnétosphère. Dans le repère tournant avec l'étoile le potentiel des zones "force-free" et de leur surface limite est pris égal à zéro.

Il disparait dans le changement de référentiel :

$$\Phi^{\text{tournant}} = \Phi^{\text{inertie}} - \vec{A}.\frac{\vec{v}}{c}$$

car $\vec{A}$ est le potentiel vecteur du champ magnétique dipolaire $\vec{B}$ (6) ; en coordonnées sphériques :

$$\vec{A} : \left(0 , 0 , \frac{B_0 R_*^2}{2} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \right)$$

et

$$\vec{v} = \vec{\Omega_*} \wedge \vec{r}$$

donc

$$\vec{A}.\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c} \frac{\sin^2\theta}{r}$$

Si les électrons suivent les lignes de champ magnétique, la condition de continuité du courant de densité $J(r, \theta_*)$ impose

$$J(r, \theta_*)/B(r, \theta_*) = \text{constante}$$

où $B(r, \theta_*)$ est le module du champ magnétique dipolaire :

$$B(r, \theta_*) = B_0 \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{R_*} \sin^2\theta_* \right)^{1/2} \qquad (43)$$

Soient $J_s(\theta_*)$ la densité de courant à la surface de l'étoile et $v(r, \theta_*) = c\beta(r, \theta_*)$ la vitesse des électrons. La densité $\eta(r, \theta_*)$ a donc pour expression :

$$\eta(r, \theta_*) = \frac{J_s(\theta_*)}{c\beta(r, \theta_*)} \frac{B(r, \theta_*)}{B(R_*, \theta_*)} \qquad (44)$$

Pour résoudre l'équation de Poisson on distingue deux zones : une zone de très faible épaisseur au-dessus de la surface stellaire dans laquelle les particules sont non relativistes et où la courbure des lignes de champ est négligeable ; et une autre zone, qui s'étend depuis la limite de la zone précedente jusqu'à des régions très éloignées de l'étoile, dans laquelle les électrons ont une vitesse prati-

quement constante et égale à celle de la lumière et où ils suivent la courbure des lignes de champ magnétique. (Fig. 7)

Résolution de l'équation dans la zone non relativiste :

Compte tenu de sa faible épaisseur le champ magnétique peut être considéré comme uniforme.

Donc $B \simeq$ cste $\qquad \eta_R \simeq$ cste

La densité de charge η s'écrit donc simplement

$$\eta = \frac{J_s}{c\beta} = \frac{J_s}{c} \frac{\Gamma}{(\Gamma^2 - 1)^{1/2}}$$

Γ est le facteur de Lorentz $\Gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Puisqu'on néglige les effets transverses le Laplacien se réduit à la dérivée seconde par rapport à r.

L'équation de Poisson se réduit à :

$$\frac{d^2\Phi^p}{dr^2} = -4\pi \left(\frac{J_s}{c} \frac{\Gamma}{(\Gamma^2-1)^{1/2}} - \eta_R \right) \qquad (45)$$

Mais la vitesse des particules de charge q est fonction du potentiel. En effet le bilan d'énergie implique :

$$\Gamma = 1 - \frac{q\Phi^p}{mc^2} \qquad (46)$$

Compte tenu de (46) l'équation (45) s'intègre facilement, avec les conditions aux limites à la surface de l'étoile :

$$\Phi^p = 0$$

et

$$\frac{\partial \Phi^p}{\partial r} = 0$$

soit $\Gamma = 1$ et $\Gamma'_r = 0$ à la surface de l'étoile.

La première condition est celle d'équipotentialité de la surface de l'étoile ; la seconde est la condition "force-free" exprimée dans le repère tournant avec l'étoile.

On obtient la loi de Child sous la forme :

$$\Gamma - 1 = A\left(r - R_*\right)^{4/5} = A\, s^{4/5} \tag{47}$$

A est la constante

$$A \simeq 5{,}45 \left(\frac{J_s}{c\eta_R}\right)^{2/3} \left(\frac{2\Omega_* B_0 |q|}{mc^3}\right)^{2/3} \tag{48}$$

cette expression est valable tant que

$$\left(\frac{2\Omega_* B_0 |q|}{mc^3}\right)^{1/2} s \ll 1$$

Soit, numériquement $s \ll 2\text{cm}$.

On peut alors calculer le module E du champ électrique créé par cette petite couche de densité $\eta - \eta_R$ de la façon suivante :

$$E = \int ds \left[\frac{J_s}{c\beta} - \eta_R\right]$$

On obtient, préjugeant de ce que $J_s \simeq c\eta_R$ (voir Scharlemann et al. 1978)

$$E \simeq -2\left(mc \left|\frac{\vec{\Omega}_* \cdot \vec{B}_*}{|q|}\right|\right)^{1/2} \tag{49}$$

où $\vec{B}_* = \vec{B}(R_*, \theta_*)$.

Résolution de l'équation de Poisson dans la zone relativiste :

La vitesse des particules étant voisine de celle de la lumière la densité de charge s'écrit :

$$\eta \simeq \frac{J_s}{c} \frac{B(r, \theta_*)}{B(R_*, \theta_*)}$$

Scharleman et al définissent la fonction $\alpha(\theta_*)$ de telle sorte que :

$$\eta = -\frac{\vec{\Omega}_* \vec{B}_*}{2\pi c}\left(1 - \alpha(\theta_*)\right) \frac{B(r, \theta_*)}{B(R_*, \theta_*)} \tag{50}$$

En effet il est probable que la densité capable d'assurer la condition $\vec{E}.\vec{B} = 0$ à la surface de l'étoile soit proche de la densité de Goldreich et Julian pour $r = R_*$.

Compte-tenu des équations (6) et (43) et de ce que θ_* est très petit, la densité η peut s'écrire :

$$\eta = -\frac{\Omega_* B_0}{2\pi c}\left(1 - \alpha(\theta_*)\right)\left(\frac{R_*}{r}\right)^3\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{9}{8}\theta_*^2\right) \qquad (51)$$

Si de plus on suppose que l'angle θ est aussi suffisamment petit, on a d'après (26)

$$\theta^2 \simeq \theta_*^2 \frac{r}{R_*} \qquad (52)$$

En utilisant des développements limités au 2ème ordre en θ_* on obtient :

$$\eta - \eta_R \simeq \frac{\Omega_* B_0}{2\pi c}\left(\frac{R_*}{r}\right)^3\left(\alpha(\theta_*) - \frac{9}{8}\theta_*^2\frac{s}{R_*}\right) \qquad (53)$$

s est défini par $r = s + R_* + \mathcal{O}(\theta^2)$.

Le Laplacien peut se développer en fonction des coordonnées (r, θ_*, φ_*). (φ_* est l'angle azimuthal du pied de la ligne de champ sur l'étoile). Dans la limite des angles θ_* petits :

$$\Delta\Phi^p = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial\Phi^p}{\partial r}\right) + \frac{R_*}{r^3}\left[\frac{1}{\theta_*}\frac{\partial}{\partial\theta_*}\left(\theta_*\frac{\partial\Phi^p}{\partial\theta_*}\right) + \frac{1}{\theta_*^2}\frac{\partial^2\Phi^p}{\partial\varphi_*^2}\right] \qquad (54)$$

L'équation de Poisson conduit donc à résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial\Phi^p}{\partial r}\right) + \frac{R_*}{r^3}\left[\frac{1}{\theta_*}\frac{\partial}{\partial\theta_*}\left(\theta_*\frac{\partial\Phi^p}{\partial\theta_*}\right) + \frac{1}{\theta_*^2}\frac{\partial^2\Phi^p}{\partial\varphi_*^2}\right]$$
$$= -2\frac{\Omega_* B_0}{c}\left(\frac{R_*}{r}\right)^3\left[\alpha(\theta_*) + \frac{9}{8}\theta_*\left(1 - \frac{r}{R_*}\right)\right] \qquad (55)$$

La fonction potentiel Φ^p devant satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$\text{a)}\quad \Phi^p(r=R_*,\theta_*)=0 \quad ; \quad \Phi^p(\theta_*=\theta_c)=0$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial\Phi^p}{\partial r}\to 0 \quad \text{quand} \quad r\gg R_* \qquad (56)$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial\Phi^p}{\partial r}(r=R_*,\theta_*)=-2\left(mc\,\frac{|\vec{\Omega}_*.\vec{B}_*|}{191}\right)^{1/2}$$

Scharleman et al proposent de résoudre cette équation en utilisant la méthode des fonctions de Green. La fonction de Green telle que $\Delta G(r;r')=-4\pi\delta(r-r')$, qui permet d'imposer les conditions aux limites a) et b) de (56) peut s'écrire :

$$G=-\frac{16\pi R_*}{\theta_c^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{J_m\left(j_{m\ell}\theta_*/\theta_c\right)J_m\left(j_{m\ell}\,\theta'_*/\theta_c\right)}{J_{m+1}^2\left(j_{m\ell}\right)\left(1+\delta_{m0}\right)}\times$$

$$\times\cos m\varphi_*\cos m\varphi'_*\;p_{m\ell}(r_<)\,q_{m\ell}(r_>) \qquad (57)$$

Les fonctions $J_m(x)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre m et les $j_{m\ell}$ sont les zéros d'ordre ℓ de ces fonctions $J_m(x)$. Les fonctions $p_{m\ell}$ ($r_<=\min(r,r')$) et $q_{m\ell}$ ($r_>=\max(r,r')$) sont des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce I_2 et K_2

$$p_{m\ell}(r)=\frac{1}{r\sqrt{\pi}}\left\{\frac{I_\ell(z)}{I_\ell(z_*)}-\frac{K_\ell(z)}{K_\ell(z_*)}\right\}$$

$$q_{m\ell}(r)=\frac{1}{r\sqrt{\pi}}\,K_\ell(z_*)\,I_\ell(z) \qquad (58)$$

L'argument Z de ces fonctions est

$$z=\frac{2j_{m\ell}}{\theta_c}\left(\frac{R_*}{r}\right)^{1/2}$$

et (59)

$$z_*=z(r=R_*)=\frac{2j_{m\ell}}{\theta_c}$$

La condition de symétrie de révolution impose $m=0$.

La fonction potentiel Φ^p se calcule par intégration

$$\Phi^p(r) = \int d^3r \; G(r;r') \; \frac{\Omega_* B_0}{2\pi c} \left[\frac{R_*}{r}\right]^3 \left[\alpha(\theta_*) + \frac{q}{8}\theta_* \left(1 - \frac{r}{R_*}\right)\right]$$

l'élément de volume étant dans ces coordonnées :

$$d^3r = \frac{r^3}{R_*} \theta_* \, dr \, d\theta_* \, d\varphi_*$$

Pour effectuer cette intégration il est nécessaire de développer le second membre en fonction de Bessel de même argument.

Les développements de Fourier-Bessel des fonctions $\alpha(\theta_*)$ et θ_*^2 utilisés par Scharleman et al sont :

$$\text{a)} \quad \alpha(\theta_*) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell \, J_0\left(j_{0\ell} \frac{\theta_*}{\theta_c}\right)$$

$$\text{b)} \quad \theta_*^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \varkappa_\ell \, J_0\left(j_{0\ell} \frac{\theta_*}{\theta_c}\right) \qquad (60)$$

pour $0 \leq \theta_* < \theta_c$.

Les coefficients $\varkappa_\ell$ ont pour expression :

$$\varkappa_\ell = \frac{2\theta_c^2}{j_{0\ell} \, J_1(j_{0\ell})} \left(1 - \frac{4}{j_{0\ell}^2}\right) \qquad (61)$$

Les coefficients α_ℓ seront fixés par la condition (56) c) qui permet de déterminer la densité capable d'assurer la condition $\vec{E}.\vec{B} = 0$ à la surface de l'étoile.

L'intégration sur les angles conduit à l'expression implicite du potentiel :

$$\Phi^p = -4\pi \frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{c} \sum_{\ell=1}^{\infty} J_0\left(j_{0\ell} \frac{\theta_*}{\theta_c}\right) \left\{ \alpha_\ell [0] + \frac{q}{8} \varkappa_\ell \left([0] - [1]\right) \right\} \qquad (62)$$

avec

$$\begin{cases} [0] = q_{0\ell}\, P^{0}_{0\ell} + p_{0\ell}\, Q^{0}_{0\ell} \\ [1] = q_{0\ell}\, P^{1}_{0\ell} + p_{0\ell}\, Q^{1}_{0\ell} \end{cases} \tag{63}$$

$$\begin{cases} P^{(a)}_{m\ell} = \displaystyle\int_{R_*}^{r} \left(\frac{r}{R_*}\right)^{a} p_{m\ell}(r)\, dr \\ Q^{(a)}_{m\ell} = \displaystyle\int_{r}^{\infty} \left(\frac{r}{R_*}\right)^{a} q_{m\ell}(r)\, dr \end{cases} \tag{64}$$

Pour effectuer ces intégrations Scharleman et al utilisent les développements limités pour grand argument :

$$\begin{aligned} I_\ell(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{z}}{\sqrt{z}} \left(1 - \frac{15}{8z}\right) \\ K_\ell(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \left(1 + \frac{15}{8z}\right) \end{aligned} \tag{65}$$

Ils obtiennent ainsi l'expression approchée du potentiel pour $s \neq 0$ suffisamment grand :

$$\Phi^{P} \simeq \frac{2\Omega_* B_0 R_*^{2}}{c} \theta_c^{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_0\left(j_{0\ell} \frac{\theta_*}{\theta_c}\right)}{j_{0\ell}^{2}} \left\{ \alpha_\ell - \frac{1}{\delta} K_\ell \frac{1}{R_*} \right\} \tag{66}$$

Les coefficients α_ℓ , déterminés par la condition (56), c) ont pour expression

$$\alpha_\ell \simeq \left(\frac{mc^{3}}{|q|\Omega_* B_0 R_*^{2}}\right)^{1/2} \frac{2}{\theta_c J_2(j_{0\ell})} \simeq \frac{5.58\ 10^{-6}}{\theta_c J_2(j_{0\ell})} \tag{67}$$

ce qui donne une valeur de α très petite devant 1, justifiant l'approximation $J_s \simeq c\eta_R$

Conclusion

La solution (66) ne convient pas pour le potentiel électrique d'une région dans laquelle les électrons partent de l'étoile qui est au potentiel zéro pour atteindre des régions éloignées où le champ électrique est nul ; car à une distance s_Φ de l'étoile :

$$s_\Phi(\theta_* = 0) = \frac{8}{9} R_* \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell / j_{0\ell}^{2}}{\sum_{\ell=1}^{\infty} \chi_\ell / j_{0\ell}^{2}} \simeq 8 R_* \tag{68}$$

le potentiel décrit par l'expression (66) s'annule. A cette distance les électrons devraient donc être réfléchis, et donc ne peuvent constituer un faisceau quittant la magnétosphère du pulsar.

3. Tentative de modèle de faisceaux réfléchis à distance finie de l'étoile

Le résultat précédent confirme l'idée émise au §III.1 que les électrons émis par la surface stellaire ne peuvent pas s'échapper de la magnétosphère mais sont au contraire réfléchis par le champ électrique à distance finie de l'étoile.

Dans le chapitre III nous avons montré qu'un plasma magnétosphérique force-free ne peut être en contact avec l'étoile le long des lignes de champ magnétique ; ou, différemment, qu'un plasma en contact avec l'étoile le long des lignes de champ magnétique ne peut être "force-free" en tout point. Nous sommes donc conduits à l'idée d'un plasma magnétosphérique parcouru par des courants. La première idée, développée dans ce paragraphe, est que le plasma magnétosphérique contenu dans les lignes ouvertes est entièrement constitué de courants dus au mouvement d'électrons émis par la surface stellaire, qui s'écoulent le long des lignes de champ magnétique jusqu'à une surface limite $r = R_{\Phi}(\theta_*)$ où ils sont réfléchis, et qui reviennent donc vers l'étoile. Il s'agit donc de chercher si un potentiel électrique Φ^p peut rendre compte de façon self-consistante de la réflexion des électrons à distance finie. Ce potentiel recouvre quatre régions différentes :

1) Une première région dans laquelle les électrons émis par l'étoile ont une vitesse faible et sont accélérés. Le champ électrique sur la surface stellaire étant tel que $\vec{E}.\vec{B} = 0$ (Space charge limited flow).

2) La seconde région dans laquelle les électrons sont relativistes.

3) La troisième région est celle où les électrons sont réfléchis et où ils sont donc à nouveau non relativistes.

4) La quatrième région étant le vide s'étendant jusqu'à l'infini.

Les quatres régions étant limitées à l'intérieur du tube des lignes ouvertes (Fig. 8).

La méthode de résolution de ce problème est similaire à celle employée par Scharleman et al. La présence simultatnée de courants sortants et de courants entrants ne modifie en rien l'équation de Poisson (41). Chaque courant correspond à une densité de charge $\frac{1}{2}\eta$ de la densité de charge totale η . En conséquence la loi de Child (47) qui est l'expression du potentiel dans la couche d'accélération au voisinage de la surface stellaire sur laquelle $\vec{E}.\vec{B}. = 0$, n'est pas changée. Donc le champ électrique qu'elle crée a encore pour intensité

$$E = -2\left(mc\frac{|\vec{\Omega}_* . \vec{B}_*|}{|q|}\right)^{1/2} \tag{49}$$

Dans la zone de faisceaux relativistes le potentiel Φ^p est solution de l'équation (55) avec les conditions aux limites suivantes

$$\text{a)}\quad \Phi^p(r=R_*,\theta_*)=0 \quad ; \quad \Phi^p(r,\theta_*=\theta_c)=0$$

$$\text{b)}\quad \Phi^p(r=R_\phi(\theta_*),\theta_*)=0 \tag{69}$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial\Phi^p}{\partial r}(r=R_*,\theta_*) = -2\left(mc\frac{|\vec{\Omega}_*.\vec{B}_*|}{|q|}\right)^{1/2}$$

La fonction de Green que nous allons utiliser pour résoudre ce problème doit satisfaire les conditons a) et b).
Elle est donnée par (57). Les fonctions radiales $p_{m\ell}(r)$ et $q_{m\ell}(r)$ étant définie différemment :

$$\begin{cases} p_{m\ell}(r) = \frac{1}{kr}\left[I_\ell(z)K_\ell(z_*) - K_\ell(z)I_\ell(z_*)\right] \\ q_{m\ell}(r) = \frac{1}{kr}\left[I_\ell(z)K_\ell(z_\phi) - K_\ell(z)I_\ell(z_\phi)\right] \end{cases} \tag{70}$$

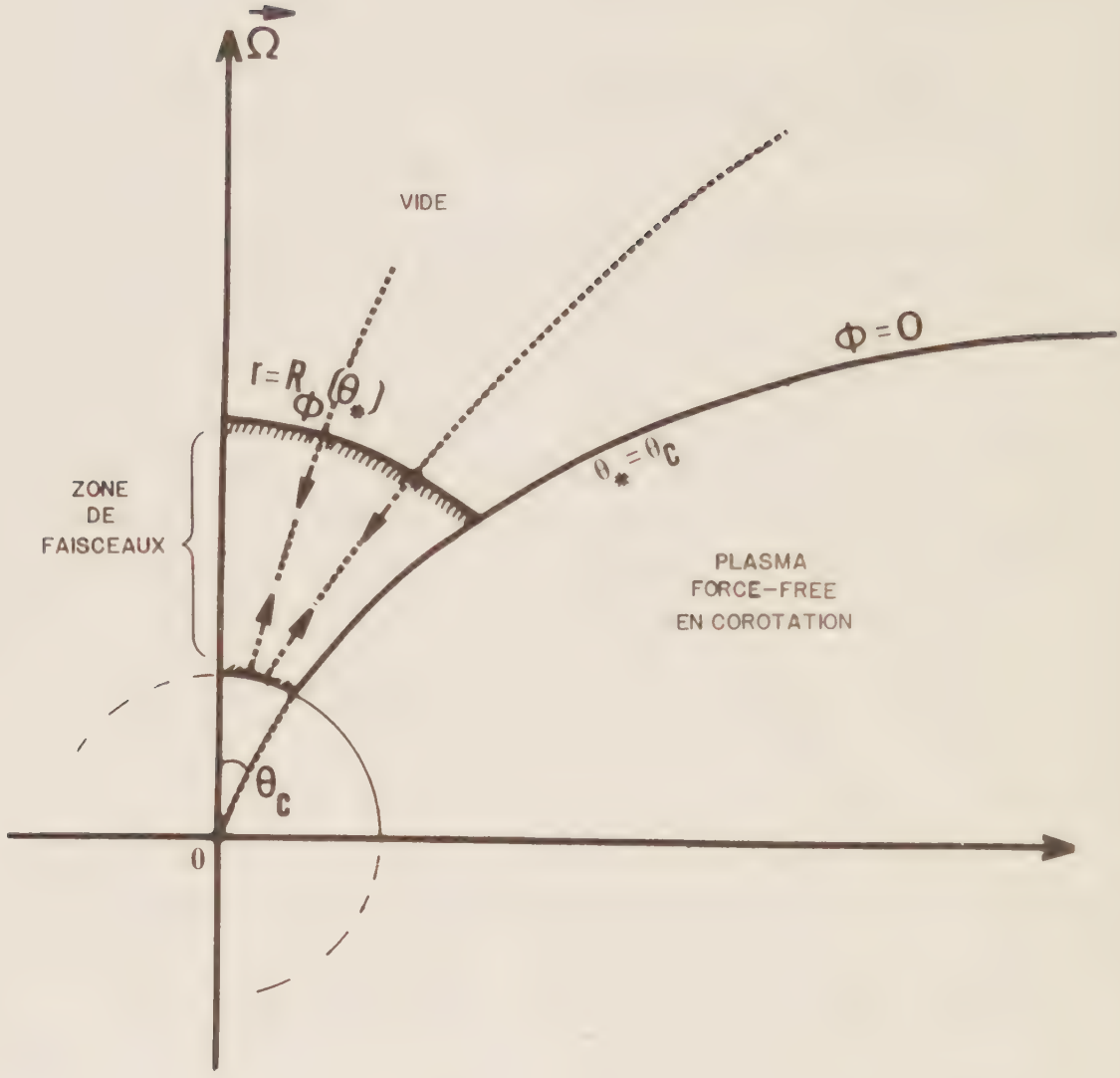


Fig. 8

Configuration hypothétique où les électrons émis par l'étoile dans le tube des lignes ouvertes du champ magnétique dipolaire sont réfléchis à distance finie et donc forme des faisceaux de retour.

L'argument Z est défini par (59)

$$Z_\Phi = Z\left(r = R_\Phi(\theta_*)\right) \tag{71}$$

$$K = \sqrt{\pi}\left[K_\ell(z_\Phi)\, I_\ell(z_*) - I_\ell(z_\Phi)\, K_\ell(z_*)\right]^{1/2} \tag{72}$$

Le nouveau potentiel Φ^p calculé avec cette nouvelle fonction de Green garde la même forme implicite (62) compte tenu de (60) et (63), mais les intégrales des fonctions radiales sont :

$$\begin{aligned} P_{o\ell}^{(a)} &= \int_{R_*}^{r} p_{o\ell}(r)\left(\frac{r}{R_*}\right)^a dr \\ Q_{o\ell}^{(a)} &= \int_{r}^{R_\Phi} \left(\frac{r}{R_*}\right)^a q_{o\ell}(r)\, dr \end{aligned} \tag{73}$$

L'utilisation des développements (65) des fonctions de Bessel modifiées $I_2(Z)$ et $K_2(Z)$ permet d'évaluer ces intégrales à l'ordre 1 en 1/Z. A cet ordre

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{(z_* z_\Phi)^{1/4}}\left[\operatorname{sh}\Lambda + \frac{15}{8}\left(\frac{1}{z_\Phi} - \frac{1}{z_*}\right)\operatorname{ch}\Lambda\right]^{1/2} \tag{74}$$

où $$\Lambda = z_* - z_\Phi \tag{75}$$

$$\int I_2(z)\frac{dr}{r} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\frac{e^z}{z\sqrt{z}}\left(1 - \frac{3}{8z}\right) \tag{76}$$

$$\int I_2(z)\frac{r}{R_*}\frac{dr}{r} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\frac{e^z}{z\sqrt{z}}\frac{r}{R_*}\left(1 + \frac{13}{8z}\right)$$

$$\int K_2(z)\frac{dr}{r} = \sqrt{\varepsilon\pi}\,\frac{e^{-z}}{z\sqrt{z}}\left(1 + \frac{3}{8z}\right)$$

$$\int K_2(z)\frac{r}{R_*}\,dr = \sqrt{\varepsilon\pi}\,\frac{e^{-z}}{z\sqrt{z}}\frac{r}{R_*}\left(1 - \frac{13}{8z}\right)$$

De ces intégrales indéfinies on déduit les expressions des intégrales définies (73) :

$$P_{ol}^{(0)} = \frac{-2}{K}\frac{1}{z\sqrt{zz_*}}\left\{ch\alpha + \left(\frac{3}{8z} - \frac{15}{8z_*}\right)sh\alpha - \left(\frac{z}{z_*}\right)^{3/2}\right\}$$

$$P_{ol}^{(1)} = \frac{-2}{K}\frac{1}{z\sqrt{zz_*}}\frac{r}{R_*}\left\{ch\alpha - \left(\frac{13}{8z} + \frac{15}{8z_*}\right)sh\alpha - \left(\frac{z}{z_*}\right)^{3/2}\frac{R_*}{r}\right\} \quad (77)$$

$$Q_{ol}^{(0)} = \frac{2}{K}\frac{1}{z\sqrt{zz_\phi}}\left\{ch\alpha_\phi - \left(\frac{3}{8z} - \frac{15}{8z_\phi}\right)sh\alpha_\phi - \left(\frac{z}{z_\phi}\right)^{3/2}\right\}$$

$$Q_{ol}^{(1)} = \frac{2}{K}\frac{1}{z\sqrt{zz_\phi}}\frac{r}{R_*}\left\{ch\alpha_\phi + \left(\frac{13}{8z} + \frac{15}{8z_\phi}\right)sh\alpha_\phi - \left(\frac{z}{z_\phi}\right)^{3/2}\frac{R_\phi}{r}\right\}$$

avec $\alpha = z_* - z$; $\alpha_\phi = z - z_\phi$

Le développement à l'ordre 1 en 1/Z des fonctions radiales (70) s'écrit :

$$p_{ol}(r) = \frac{1}{Kr}\frac{1}{\sqrt{zz_*}}\left\{-sh\alpha + \frac{15}{8}\left(\frac{1}{z_*} - \frac{1}{z}\right)ch\alpha\right\}$$

$$q_{ol}(r) = \frac{1}{Kr}\frac{1}{\sqrt{zz_\phi}}\left\{sh\alpha_\phi + \frac{15}{8}\left(\frac{1}{z_\phi} - \frac{1}{z}\right)ch\alpha_\phi\right\} \quad (78)$$

De ces développements (77) et (78) on déduit l'expression des facteurs (63)

$$[0] = \frac{2}{K^2 r z^2\sqrt{z_* z_\phi}}\left\{-sh\Lambda + \frac{15}{8}\left(1/z_* - 1/z_\phi\right)ch\Lambda\right.$$
$$+\left(\frac{z}{z_\phi}\right)^{3/2}\left(sh\alpha - \frac{15}{8}\left(1/z_* - 1/z\right)ch\alpha\right) \quad (79)$$
$$\left.+\left(\frac{z}{z_*}\right)^{3/2}\left(sh\alpha_\phi + \frac{15}{8}\left(1/z_\phi - 1/z\right)ch\alpha_\phi\right)\right\}$$

$$[1] = \frac{2}{K^2 r z^2\sqrt{z_* z_\phi}}\frac{r}{R_*}\left\{-sh\Lambda + \frac{15}{8}\left(1/z_* - 1/z_\phi\right)ch\Lambda\right.$$
$$+\left(\frac{z}{z_\phi}\right)^{3/2}\left(\frac{R_\phi}{r}\right)\left(sh\alpha - \frac{15}{8}\left(1/z_* - 1/z\right)ch\alpha\right)$$
$$\left.+\left(\frac{z}{z_*}\right)^{3/2}\left(\frac{R_*}{r}\right)\left(sh\alpha_\phi + \frac{15}{8}\left(1/z_\phi - 1/z\right)ch\alpha_\phi\right)\right\}$$

avec $\alpha = z_* - z$; $\alpha_\phi = z - z_\phi$; $\Lambda = z_* - z_\phi = \alpha + \alpha_\phi$

Ces expressions compliquées se simplifient si l'on suppose la surface $r = R_\Phi(\theta_*)$ à une distance appréciable de la surface stellaire. Plus précisément si $\frac{R_\Phi}{R_*} > 1{,}04$ l'approximation $\mathrm{sh}\Lambda \simeq \mathrm{ch}\Lambda \simeq \frac{1}{2} e^{\Lambda}$ est suffisante. De façon semblable, si on considère la valeur du potentiel en un point ni trop près de la surface stellaire ($\alpha > 3$) ni trop près de la surface de réflexion ($\alpha_\Phi > 3$) on peut négliger les termes $e^{-\alpha}$ et $e^{-\alpha_\Phi}$. Dans ce cas les facteurs (63) s'écrivent très simplement :

$$[0] \simeq \frac{-2}{\pi r z^2} = -\frac{\theta_c^2}{2\pi j_{0\ell}^2 R_*}$$
$$[1] \simeq \frac{-2}{\pi r z^2}\left(1 - \frac{r}{R_*}\right) = -\frac{\theta_c^2}{2\pi j_{0\ell}^2 R_*}\left(1 - \frac{r}{R_*}\right) \qquad (80)$$

Le potentiel Φ^p en un tel point a donc pour expression

$$\Phi^p \simeq \frac{2\Omega_* B_0 R_*^2}{c} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{0\ell}\theta_*/\theta_c)}{j_{0\ell}^2}\left(\alpha_\ell - \frac{9}{8}\varkappa_\ell \frac{1}{R_*}\right) \qquad (81)$$

identique à (66).

Pour déterminer la valeur des coefficients α_ℓ il faut calculer la dérivée $\frac{\partial \Phi^p}{\partial r}$ en $r = R_*$,

on a

$$\frac{\partial [a]}{\partial r} = -\frac{z}{2r}\frac{\partial [a]}{\partial z}$$

à l'ordre 1 en 1/Z imposé par les développements utilisés :

$$\left.\frac{\partial [0]}{\partial z}\right|_{z_*} = \frac{2}{k^2 R_* z_*^2 \sqrt{z_* z_\Phi}}\left\{-\left(\frac{z_*}{z_\Phi}\right)^{3/2} + \frac{3}{2}\frac{1}{z_*}\mathrm{sh}\Lambda + \mathrm{ch}\Lambda + \frac{15}{8}\left(\frac{1}{z_\Phi} - \frac{1}{z_*}\right)\mathrm{sh}\Lambda\right\}$$

$$\left.\frac{\partial [1]}{\partial z}\right|_{z_*} = \frac{2}{k^2 R_* z_*^2 \sqrt{z_* z_\Phi}}\left\{-\left(\frac{z_*}{z_\Phi}\right)^{3/2}\frac{R_\Phi}{R_*} + \frac{3}{2}\frac{1}{z_*}\mathrm{sh}\Lambda\frac{R_\Phi}{R_*} + \mathrm{ch}\Lambda + \frac{15}{8}\left(\frac{1}{z_\Phi} - \frac{1}{z_*}\right)\mathrm{sh}\Lambda\right\}$$

Dans la même hypothèse que précédemment ($\frac{R}{R_*} > 1{,}04$) la dérivée s'exprime de façon simple à l'ordre zéro en 1/Z :

$$\frac{\partial \phi^P}{\partial r}(r = R_*) = \frac{\varepsilon \Omega_* B_0 R_*}{c} \theta_c \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{0\ell}\,\theta_*/\theta_c)}{j_{0\ell}} \alpha_\ell \qquad (82)$$

Pour déterminer la valeur approchée des coefficients α_ℓ on peut utiliser la condition (69) c) pour $\theta_* = 0$, et le développement :

$$1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} 1_\ell\, J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{j_{0\ell}\, J_1(j_{0\ell})} J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right) \qquad (83)$$

On en déduit

$$\alpha_\ell = \left(\frac{mc^3}{|q|\Omega_* B_0 R_*^2}\right)^{1/2} \frac{2}{\theta_c\, J_1(j_{0\ell})} \qquad (84)$$

identique à (67).

On peut de façon semblable calculer la dérivée du potentiel au point $(r = R_\phi(\theta_*), \theta_*)$

$$\left.\frac{\partial \phi^P}{\partial r}\right|_{r=R_\phi} = \frac{\varepsilon \Omega_* B_0 R_* \theta_c}{c} \left(\frac{R_*}{R_\phi}\right)^{3/2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right)}{j_{0\ell}} \left(-\alpha_\ell + \frac{9}{8} x_\ell \frac{\Delta_0}{R_*}\right) \qquad (85)$$

Sur cette expression on constate que la dérivée n'est négative que si

$$\Delta_\phi < \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right)\frac{\alpha_\ell}{j_{0\ell}}}{\sum_{\ell=1}^{\infty} J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right)\frac{x_\ell}{j_{0\ell}}}$$

Le plasma ainsi constitué de faisceaux réfléchis à distance finie ne peut s'étendre à une distance plus grande qu'environ $8.R_*$. La zone de vide qui suit sera donc également limitée au tube des lignes ouvertes.

Cette dérivée (85) est liée au champ électrique créé par la couche d'électrons non relativistes voisine de la surface de réflexion. Ce champ électrique dépend lui-même du potentiel du vide. C'est la continuité du champ électrique à travers cette couche d'électrons non relativistes qui fournit en principe la valeur $R_\phi(\theta_*)$.

Pour obtenir une solution physiquement acceptable il faut donc trouver un potentiel du vide ϕ^v qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\text{a)} \quad \phi^v\left(R_\phi(\theta_*)\right) = 0$$

$$\text{b)} \quad \phi^v\left(\theta_* = \theta_c\right) = 0 \qquad (86)$$

$$\text{c)} \quad \frac{\partial \phi^v}{\partial r} \longrightarrow 0 \qquad \text{pour } r \text{ grand}$$

et à la continuité du champ électrique à la transition vers la couche d'électrons non relativistes, qui impose $\frac{\partial \phi^v}{\partial r}(r = R_\phi(\theta_*)) \leqslant 0$ (voir Fig. 9).

Dans le vide, l'équation de Poisson (41) devient

$$\Delta \phi^v = 4\pi \eta_R \qquad (87)$$

Compte tenu de (42) et (54) le potentiel ϕ^v est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial \phi^v}{\partial r}\right) + \frac{R_*}{r^3}\left[\frac{1}{\theta_*}\frac{\partial}{\partial \theta_*}\left(\theta_* \frac{\partial \phi^v}{\partial \theta_*}\right) + \frac{1}{\theta_*^2}\frac{\partial^2 \phi^v}{\partial \varphi_*^2}\right]$$

$$= -2\,\frac{5_* B_0}{c}\left(\frac{R_*}{r}\right)^3\left(1 - \frac{3}{2}\theta_*^2 \frac{r}{R_*}\right) \qquad (88)$$

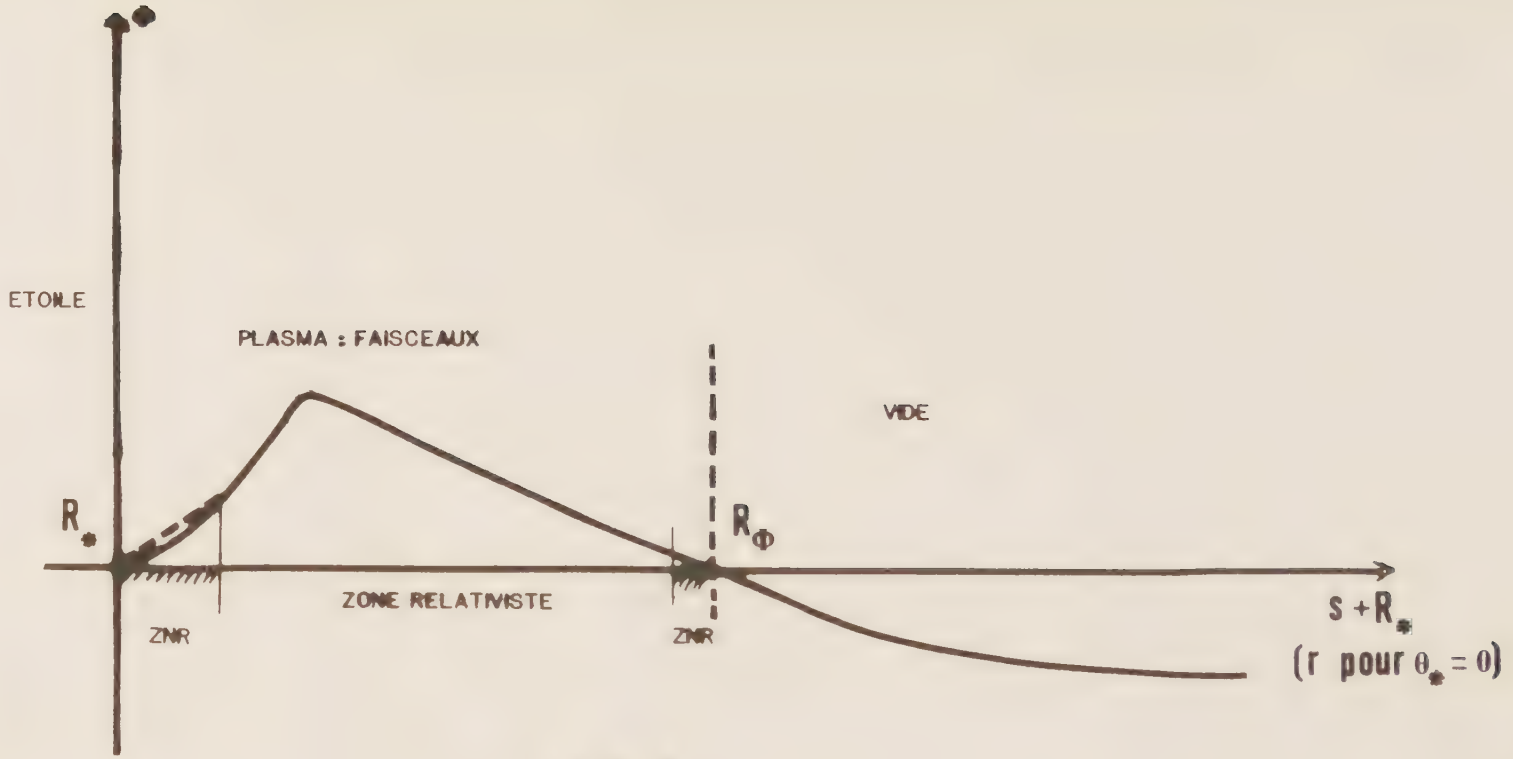


Fig. 9

Illustration des différents domaines distingués dans les calculs : a) le domaine des faisceaux compris entre R_* et R_Φ (pour une ligne de champ donnée), qui se divise lui-même en trois zones : une zone d'accélération où les électrons sont non relativistes, une zone où ils sont relativistes et la zone limite où ils sont à nouveau non relativistes. b) le domaine du vide. La continuité du potentiel et du champ électrique à la transition des deux domaines impose au potentiel du vide une pente négative en R_Φ.

La solution cherchée s'obtient encore en utilisant la méthode des fonctions de Green. La fonction qui convient aux conditions (86) a), b), c) possède la même forme (57) dans laquelle les fonctions radiales sont :

$$p_{m\ell}(r) = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \left[\frac{I_\ell(z)}{I_\ell(z_\phi)} - \frac{K_\ell(z)}{K_\ell(z_\phi)} \right] \qquad (89)$$

$$q_{m\ell}(r) = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} K_\ell(z_\phi)\, I_\ell(z)$$

La similitude de ce calcul avec celui de Scharleman et al nous permet d'écrire la forme implicite du potentiel :

$$\Phi^v = -4\pi \frac{\Omega_* R_*^3 B_0}{c} \sum_{\ell=1}^{\infty} J_0\left(j_{0\ell} \frac{\theta_*}{\theta_c}\right) \left\{ 1_\ell[0] - \frac{3}{2} X_\ell[1] \right\} \qquad (90)$$

compte tenu de (83) (60, b), et (63) et de

$$P_{0\ell}^{(a)} = \int_{R_\phi}^{r} p_{0\ell}(r) \left(\frac{r}{R_*}\right)^a dr \quad ; \quad Q_{0\ell}^{(a)} = \int_{r}^{\infty} q_{0\ell}(r) \left(\frac{r}{R_*}\right)^a dr \qquad (91)$$

En utilisant encore les développements (65) :

$$P_{0\ell}^{(a)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, z_\phi} \left\{ 1 - \left(\frac{z_\phi}{z}\right)^{3/2} \left(\frac{r}{R_*}\right)^a \left[\operatorname{ch}(z - z_\phi) - \left((2a - \tfrac{3}{8}) \tfrac{1}{z} - \frac{15}{8 z_\phi} \right) \operatorname{sh}(z_\phi - z) \right] \right\}$$

$$Q_{0\ell}^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z \sqrt{2 z_\phi}}\, e^{z - z_\phi} \left(\frac{r}{R_*}\right)^a \left(1 + (2a - \tfrac{3}{8}) \tfrac{1}{z} + \frac{15}{8 z_\phi} \right)$$

$$[a] = q_{0\ell} P_{0\ell}^{(a)} + p_{0\ell} Q_{0\ell}^{(a)} = \frac{-2}{\pi r z^2} \left(\frac{r}{R_*}\right)^a \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \right)$$

si $e^{z - z_\phi} \ll 1$, $(z - z_\phi < 0)$.

Donc en un point éloigné de la surface $r = R_\phi(\theta_*)$ le potentiel du vide s'écrit

$$\Phi^v = \frac{2\Omega_* B_0 R_*^2 \theta_c^2}{c} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right)}{j_{0\ell}^2}\left(1_\ell - \frac{3}{2}\chi_\ell \frac{r}{R_*}\right) \qquad (92)$$

Calculons maintenant la dérivée par rapport à r du potentiel électrique, pour $r = R_\phi(\theta_*)$

$$\frac{\partial [a]}{\partial r} = -\frac{z}{\varepsilon r}\frac{\partial [a]}{\partial z}$$

$$\frac{\partial [a]}{\partial z} = \frac{\partial p_{0\ell}}{\partial z}\varphi_{0\ell}^{(a)} + p_{0\ell}\frac{\partial \varphi_{0\ell}^{(a)}}{\partial z} + \frac{\partial q_{0\ell}}{\partial z}P_{0\ell}^{(a)} + q_{0\ell}\frac{\partial P_{0\ell}^{(a)}}{\partial z}$$

En $z = z_\phi$, $P_{0\ell}^{(a)}$, $p_{0\ell}$ et $\frac{\partial P_{0\ell}^{(a)}}{\partial z}$ sont nuls d'après (91) et (89).

Donc

$$\left.\frac{\partial [a]}{\partial r}\right|_{r=R_\phi} = -\frac{z_\phi}{\varepsilon R_\phi}\left.\frac{\partial p_{0\ell}}{\partial z}\varphi_{0\ell}^{a}\right|_{r=R_\phi}$$

$$\varphi_{0\ell}^{(a)}(z=z_\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z_\phi^2}\left(\frac{R_\phi}{R_*}\right)^a\left(1 + \left(2a - \frac{3}{8} + \frac{15}{8}\right)\frac{1}{z_\phi}\right)$$

$$\left.\frac{\partial p_{0\ell}}{\partial z}\right|_{z=z_\phi} = \frac{2}{r\sqrt{\pi}}$$

On en déduit

$$\left.\frac{\partial [a]}{\partial r}\right|_{r=R_\phi} = \frac{-1}{\pi R_\phi^2 z_\phi}\left(\frac{R_\phi}{R_*}\right)^a = \frac{-1}{\pi R_*^2 z_*}\left(\frac{R_\phi}{R_*}\right)^{a-3/2}$$

La dérivée $\partial\Phi^v/\partial r\,|_{r=R_\phi}$ s'écrit donc :

$$\left.\frac{\partial \Phi^v}{\partial r}\right|_{r=R_\phi} = \frac{2\Omega_* B_0 R_*}{c}\theta_c\left(\frac{R_\phi}{R_*}\right)^{-3/2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right)}{j_{0\ell}}\left(1_\ell - \frac{3}{2}\chi_\ell\frac{R_\phi}{R_*}\right) \qquad (93)$$

Or, étant donnée la très petite valeur de χ_ℓ (61) cette dérivee est positive. Il est donc impossible d'avoir la configuration initialement proposée.

Remarque : Même en augmentant la valeur de θ_c (augmentation de la vitesse de rotation) pour diminuer la distance r du point où la dérivée $\partial\Phi/\partial r\,|_{1=1_\Phi}$ change de signe $\left(1/R_* \simeq 3{,}33/\theta_c^2\right)$, on ne peut satisfaire la condition $\partial\Phi^2/\partial r\,|_{1=1_\Phi}$ en même temps $\left(\frac{\Delta\Phi}{R_*} \simeq \frac{7.10^{-5}}{\theta_c^3}\right)$.

Conclusion

Ce dernier calcul montre donc que même dans cette configuration particulière où la région de vide s'étend à l'intérieur d'un tube (limité par une surface "force-free", $\theta_* = \theta_c$) jusqu'à une surface où la condition "force-free" n'est plus imposée, le champ électrique du vide tend à extraire les électrons et donc empêche la formation d'un plasma d'extension finie. La difficulté doit provenir de ce que la surface qui limiterait l'ensemble du plasma magnétosphérique (c'est à dire la surface $\theta_* = \theta_c$ et les deux surfaces hypothétiques $r = R_\Phi(\theta_*)$ au dessus de chaque pôle) serait équipotentielle dans le référentiel en rotation avec l'étoile ; c'est à dire que ce potentiel serait $\left(\Omega_* B_0 R_*^3/2c\right)\left(\sin^2\theta/R_\Phi\right)$ dans le référentiel d'inertie. Il semble donc que les difficultées rencontrées proviennent de ce potentiel très particulier. Il s'agit donc plutôt de chercher dans quelles conditions un plasma "force-free" ne possède pas ce potentiel (cf. Jackson 1980-81), plutôt que de chercher un plasma non force-free (qui de plus ne serait pas dans un état minimal d'énergie). (Jackson (1979)).

Dans la partie suivante nous allons donc examiner une configuration tout à fait vraisemblable dans laquelle un plasma "force-free" possède un potentiel électrostatique différent de $\frac{\Omega_* B_0 R_*^3}{2c}\,\frac{\sin^2\theta}{r}$.

4. Modèle d'un plasma magnétosphérique "force-free" qui échange des électrons avec l'étoile.

Nous venons de voir qu'un plasma magnétosphérique ne peut être constitué purement de faisceaux. De plus il est probable que les électrons perdent une partie de leur énergie au cours de leur trajet. Ceci doit conduire à une accumulation d'électrons au

dessus du pôle comme on l'a déjà proposé dans l'étude du potentiel du vide (§ III.1). Or on sait qu'un plasma "force-free" ne peut être séparé de l'étoile par une zone de vide. Le potentiel dans cette zone tend à faire sortir les électrons de ce plasma magnétosphérique. On est donc conduit à la configuration réaliste suivante : il existe un plasma magnétosphérique "force-free" d'extension finie ne touchant pas l'étoile par l'intermédiaire des lignes de champ ouvertes. L'état d'équilibre de cette configuration est réalisé par un échange d'électrons entre la surface stellaire et la surface qui limite le plasma magnétosphérique dans sa partie inférieure (Fig. 10).

Nous allons chercher dans ce paragraphe à déterminer le potentiel Φ devant régner dans ce plasma "force-free", sa vitesse de rotation angulaire due au drift électromagnétique, et sa densité dans la zone où les faisceaux coexistent avec le plasma "tranquille".

Puisque les faisceaux atteignent une région "force-free" le potentiel de la zone de faisceaux purs doit donc être limité par deux surfaces "force-free" : la surface de l'étoile (pour assurer la condition "space-charge-limited flow) et la surface $r = R_2(\theta_*)$ qui limite inférieurement le plasma magnétosphérique où $\vec{E}.\vec{B} = 0$. Sur cette surface $r = R_2(\theta_*)$ le potentiel $\Phi(R_2(\theta_*))$ doit être différent de $\Phi(R_*(\theta_*))$ qui règne sur la surface stellaire. En effet les lignes de champ sont équipotentielles dans le plasma "force-free" ; si $r = R_\Phi(\theta_*)$ est la surface qui sépare ce plasma du vide (Fig. 10) on a

$$\Phi\left(R_2(\theta_*)\right) = \Phi\left(R_\Phi(\theta_*)\right)$$

de sorte que si $\Phi(R_2(\theta_*)) = \Phi(R_*(\theta_*))$, les conditions aux limites sur la surface $r = R_\Phi(\theta_*)$ seraient celles pour lesquelles le théorème de Pilipp démontre l'impossibilité d'une solution convergente pour le potentiel du vide. Donc nécessairement, le potentiel Φ^F dans la zone de faisceaux purs, doit avoir l'une des formes suivantes :

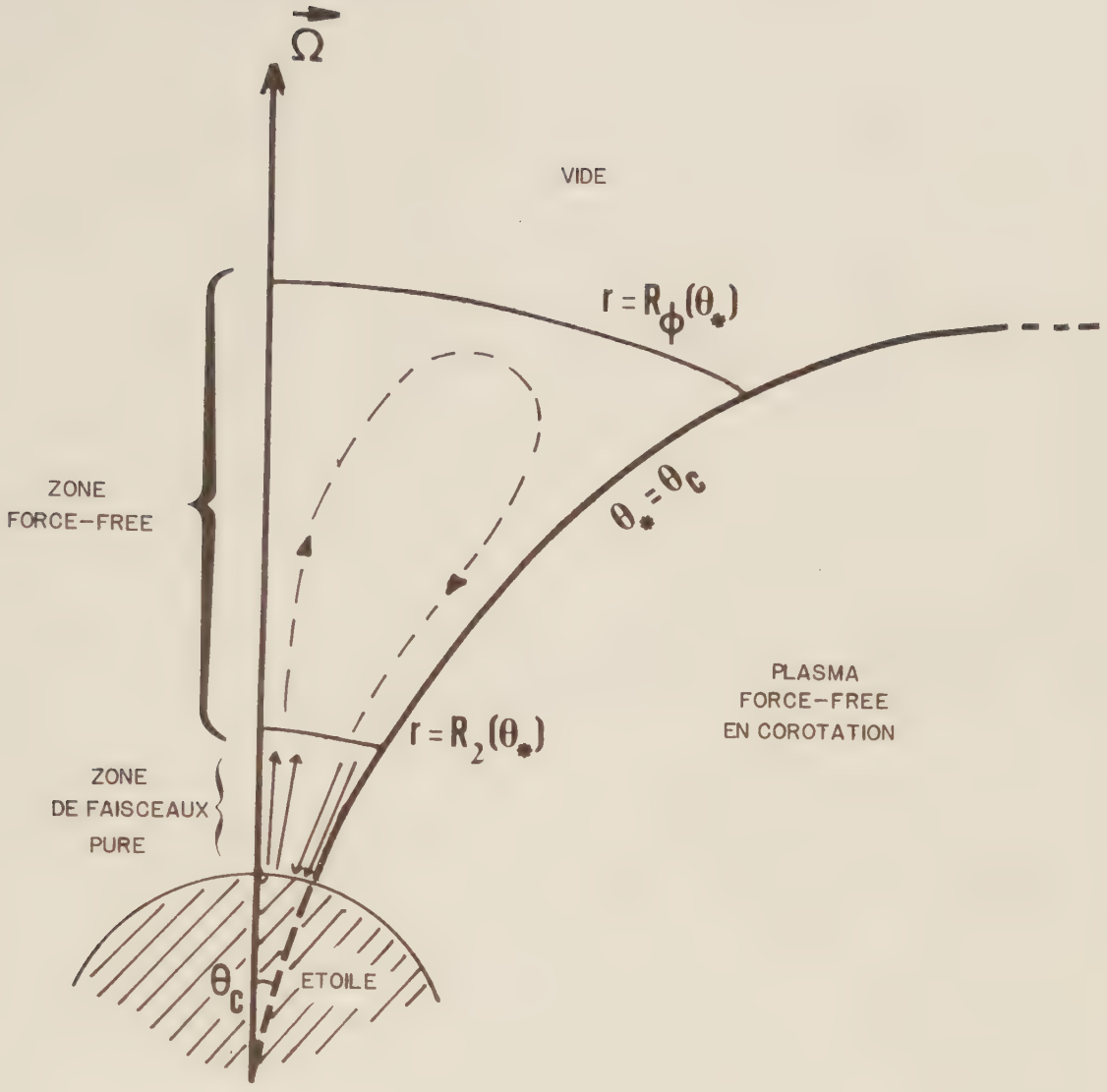
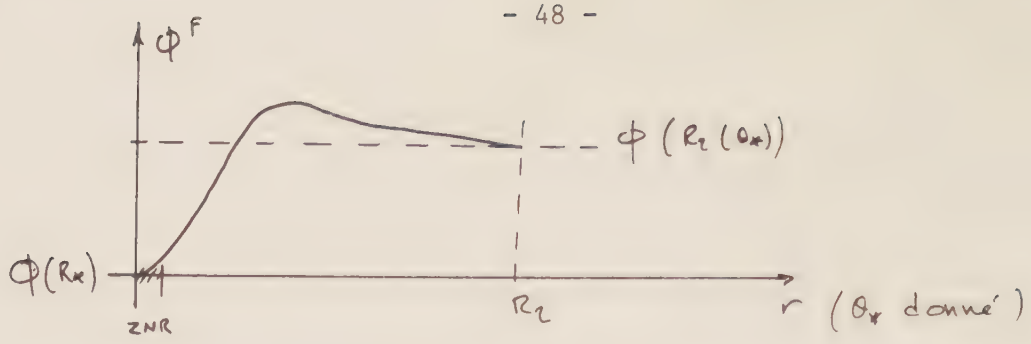
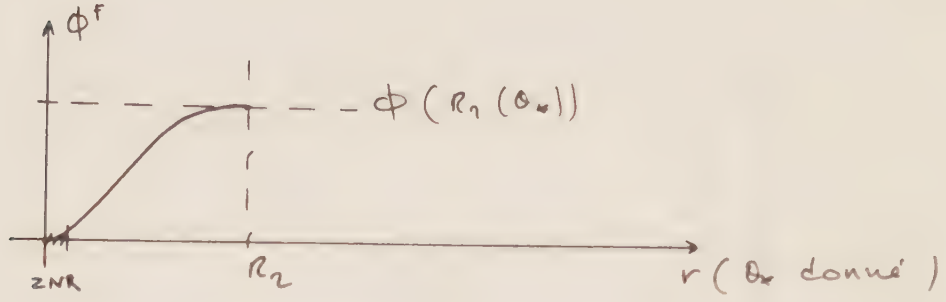


Fig. 10

Configuration réaliste dans laquelle l'étoile échange des électrons avec un plasma magnétosphérique "force-free" d'extension finie.





ZNR : zone non relativiste

Le potentiel Φ^F se calcule en deux parties :

1) Celle qui correspond à la zone des particules non relativistes au voisinage de la surface stellaire ; le calcul du champ électrique est le même que dans les § IV 2), 3).

2) Celle qui correspond à la région des électrons animés de vitesses relativistes. Elle s'étend de la zone précédente jusqu'à la surface $r = R_2(\theta_*)$ et est limitée au tube des lignes ouvertes.

La similitude avec les situations précédentes nous conduit à chercher pour le potentiel électrique de la zone relativiste, une solution du type :

$$\Phi^F = \sum_{\ell=1}^{\infty} J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right) g_\ell(r) \qquad (94)$$

dans le référentiel tournant avec l'étoile.

Ce potentiel doit satisfaire l'équation de Poisson (55). En reportant l'expression (94) dans (55), compte tenu des développements (60) on obtient une nouvelle équation différentielle pour la fonction radiale :

$$\frac{d^2 g_\ell}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{dg_\ell}{dr} + \frac{\mu_\ell}{r^3} g_\ell(r) = \left(\frac{\beta_\ell^*}{r^3} + \frac{\beta_\ell}{r^2}\right) \tag{95}$$

$$\begin{cases} \beta_\ell^* = -\dfrac{8\pi\Omega_* B_0 R_*^3}{c}\left(\alpha_\ell + \dfrac{9}{8}\varkappa_\ell\right) \\ \beta_\ell = \dfrac{8\pi\Omega_* B_0 R_*^3}{c}\dfrac{9}{8}\dfrac{\varkappa_\ell}{R_*} \\ \mu_\ell = \dfrac{R_* j_{0\ell}^2}{a_c^2} \end{cases} \tag{96}$$

Pour résoudre cette équation nous utilisons la méthode des fonctions de Green sour une forme légèrement différente de la précédente (Morses et Feshbach Par. I, p. 825). La solution de l'équation (95) s'écrit de façon générale :

$$g_\ell(r) = -y_1 \int_{R_*}^{r} y_2 \frac{dr}{W}\left(\beta_\ell^* r^{-3} + \beta_\ell r^{-2}\right) - y_2 \int_{r}^{R_2} y_1 \frac{dr}{W}\left(\beta_\ell^* r^{-3} + \beta_\ell r^{-2}\right) \tag{97}$$

y_1 et y_2 sont deux fonctions indépendantes de l'équation homogène déduite de (95). Donc

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{r}\left(a_1 I_\ell(z) + b_1 K_\ell(z)\right) \\ y_2 &= \frac{1}{r}\left(a_2 I_\ell(z) + b_2 K_\ell(z)\right) \end{aligned} \tag{98}$$

W est le Wronskien de ces deux solutions :

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{1}{2r^3}\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) \tag{99}$$

En tenant compte des conditions aux limites

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \Phi^F\left(R_*(\Omega_*)\right) = 0 \\ &\text{b)} \quad \frac{\partial \Phi^F}{\partial r}\left(R_2(\Omega_*)\right) = 0 \end{aligned} \tag{100}$$

la solution cherchée s'écrit :

$$g_\ell(r) = \frac{-1}{Kr}\left\{\left(a_1 I_\ell(z) + b_1 K_\ell(z)\right)\int_{R_*}^{r}\left(a_\ell I_\ell(z) + b_\ell K_\ell(z)\right)\left(\beta_*^\ell + \beta^\ell r\right)\frac{dr}{r}\right.$$
$$\left. + \left(a_\ell I_\ell(z) + b_\ell K_\ell(z)\right)\int_{r}^{R_\ell}\left(a_1 I_\ell(z) + b_1 K_\ell(z)\right)\left(\beta_*^\ell + \beta^\ell r\right)\frac{dr}{r}\right\} \qquad (101)$$

avec

$$a_\ell = K_\ell(z_*) \qquad a_1 = K_1(z_\ell)$$
$$b_\ell = -I_\ell(z_*) \qquad b_1 = I_1(z_\ell) \qquad (102)$$
$$K = \frac{1}{\ell}\left(a_1 b_\ell - a_\ell b_1\right) \qquad z_\ell = z\left(r = R_\ell\right)$$

Sur la surface $r = R_2(\theta_*)$ la fonction $g_\ell(r)$ prend la valeur :

$$g_\ell(R_\ell) = \frac{-1}{KR_\ell}\left[K_1(z_\ell) I_\ell(z_\ell) + I_1(z_\ell) K_\ell(z_\ell)\right] \times$$
$$\times \int_{R_*}^{R_\ell}\left[K_\ell(z_*) I_\ell(z) - I_\ell(z_*) K_\ell(z)\right]\left[\beta_*^\ell + \beta^\ell r\right]\frac{dr}{r} \qquad (103)$$

A l'ordre le plus bas, les développements des fonctions de Bessel pour grand argument sont :

$$I_1(z) \simeq I_\ell(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{\ell\pi}}\frac{e^{+z}}{\sqrt{z}}$$
$$K_1(z) \simeq K_\ell(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{\ell}}\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \qquad (104)$$

On en déduit la valeur de K à l'ordre correspondant

$$K = -\frac{1}{\ell}\,\frac{ch\left(z_* - z_\ell\right)}{\sqrt{z_* z_\ell}} \qquad (105)$$

et

$$K_1(z_\ell)\, I_\ell(z_\ell) + I_1(z_\ell) K_\ell(z_\ell) \simeq \frac{1}{z_\ell} \tag{106}$$

et

$$\int_{R_*}^{R_\ell} \left[K_\ell(z_\ell) I_\ell(z) - I_\ell(z_\ell) K_\ell(z) \right] \left[\beta_*^\ell + \rho^\ell r \right] \frac{dr}{r}$$

$$\simeq \frac{-\ell}{z_\ell \sqrt{z_* z_\ell}} \left(\beta_*^\ell + \rho^\ell R_\ell \right) \mathrm{ch}\,(z_* - z_\ell) \tag{107}$$

On obtient finalement l'expression du potentiel sur la surface $r = R_2(\theta_*)$

$$\Phi^F\left(R_\ell(\theta_*)\right) \simeq \frac{\ell \Omega_* B_0 R_*^2}{c} \theta_c^\ell \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_0\left(j_{0\ell} \frac{\theta_*}{\theta_c}\right)}{j_{0\ell}^2} \left(\alpha_\ell - \frac{9}{8} \kappa_\ell \frac{\ell_\ell(\theta_*)}{R_*} \right) \tag{108}$$

A cet ordre la forme de la fonction potentiel est donc encore la même.

Par continuité, ce potentiel fonction de θ_* est donc le potentiel Φ^P qui règne sur les lignes de champ équipotentielles du plasma "force-free". On peut donc calculer la vitesse de drift électromagnétique Ω de ce plasma.

Des relations (12) et (20), et de la définition :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi^P$$

on déduit :

$$\Omega = c \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi^P}{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \psi} = c \frac{d\Phi^P}{d\psi} \tag{109}$$

(voir aussi Michel 1979).

Dans le cas du champ magnétique dipolaire ψ est défini par (14). Puisque θ_* est un angle très petit, on peut écrire :

$$\frac{\Omega}{\Omega_*} = \frac{\ell c}{\Omega_* B_0 R_*^2} \frac{d\Phi^P}{d\theta_*^2} \tag{110}$$

Si on dérive l'expression (108) du potentiel par rapport à θ_*^2 en négligeant la dérivée $d\alpha_2/d\theta_*$ c'est à dire en supposant que les électrons parcourent des chemins de longueur voisine sur les différentes lignes de champ, on obtient :

$$\frac{\Omega}{\Omega_*} = -2\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right)}{j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}} \left(\alpha_\ell - \frac{q}{\beta}\varkappa_\ell \frac{\delta_c}{R_*}\right) \qquad (111)$$

Dans le repère d'inertie cette relation devient simplement :

$$\frac{\Omega^{in}}{\Omega_*} = 1 - 2\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right)}{j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}} \left(\alpha_\ell - \frac{q}{\beta}\varkappa_\ell \frac{\delta_c}{R_*}\right) \qquad (112)$$

A la limite $\theta_* \to 0$:

$$J_1\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right) \to \frac{1}{2} j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c} \qquad J_0\left(j_{0\ell}\frac{\theta_*}{\theta_c}\right) \to 1$$

Donc d'après (112) et (60)

$$\frac{\Omega^{in}}{\Omega_*}(\theta_*=0) = 1 - \alpha(\theta_*=0) \qquad (113)$$

On peut maintenant calculer la densité totale de ce plasma "force-free". Celle ci s'obtient à partir de l'équation de Poisson dans le repère d'inertie

$$4\pi\rho = -\Delta\phi^P \qquad (114)$$

On peut donner à cette équation une expression différente :

$$4\pi\rho = -\Delta\phi^P = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi^P = -\operatorname{div}\left[\frac{d\phi^P}{d\psi}\operatorname{grad}\psi\right]$$

$$= -\frac{d\phi}{d\psi}\Delta\psi - \operatorname{grad}\psi \cdot \operatorname{grad}\frac{d\phi^P}{d\psi}$$

$$= -\frac{d\phi}{d\psi}\Delta\psi - (\operatorname{grad}\psi \cdot \operatorname{grad}\psi)\frac{d^2\phi^P}{d\psi^2}$$

$$= -\frac{\Omega^{in}}{c}\Delta\psi - (\operatorname{grad}\psi \cdot \operatorname{grad}\psi)\frac{d\Omega^{in}}{c\,d\psi}$$

D'après (14) :

$$4\pi\rho = -\frac{\Omega^{in}}{c}\Delta\psi - \frac{r^2\sin^2\theta}{c}B^2\frac{d\Omega^{in}}{d\psi} \qquad (115)$$

Le champ magnétique étant supposé dipolaire ψ est donné par (14) et B par (43), donc

$$\rho = -\frac{\Omega^{in}B_0R_*^3}{2\pi c}\frac{1}{r^3}\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\theta\right) + \psi\frac{\partial\Omega^{in}}{\partial\psi}\frac{1}{\Omega^{in}}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2\theta\right)\right] \qquad (116)$$

l'angle θ_* étant très petit

$$\psi\frac{\partial\Omega^{in}}{\partial\psi}\frac{1}{\Omega^{in}} \simeq \frac{\theta_*^2}{\Omega^{in}}\frac{d\Omega^{in}}{d\theta_*^2} \qquad (117)$$

et de l'expression (112) on déduit :

$$\frac{\theta_*^2}{\Omega^{in}}\frac{\partial\Omega^{in}}{\partial\theta_*^2} = 1 - \frac{\Omega^{in}}{\Omega_*} - \left(\alpha - \frac{9}{8}\theta_*^2\frac{\lambda_2}{R_*}\right)$$

en supposant toujours λ_2 constant.

Donc pour $\theta_* = 0$, la densité du plasma est :

$$\rho(\theta_*=0) \simeq -\frac{\Omega_*B_0}{2\pi c}\left(\frac{R_*}{r}\right)^3\left(1-\alpha(\theta_*=0)\right)$$

Cette valeur est identique à celle de la densité des faisceaux η déduite de (51) si $\theta_* = 0$. Pour comparer ces deux densités η et ρ pour des angles faibles, on utilise un développement au second ordre en θ_*^2

$$\rho = -\frac{\Omega_*B_0}{2\pi c}\left(\frac{R_*}{r}\right)^3\left\{1-\alpha+\frac{9}{8}\frac{\theta_*^2}{R_*}\left(\lambda_2-\frac{4}{3}\lambda_1\right)-\frac{3}{2}\theta_*^2\right\}$$

$$\eta = -\frac{\Omega_*B_0}{2\pi c}\left(\frac{R_*}{r}\right)^3\left\{1-\alpha-\frac{3}{2}\theta_*^2-\frac{3}{8}\theta_*^2\frac{\lambda_1}{R_*}\right\}$$

la différence a donc pour expression

$$\rho - \eta = - \frac{\Omega_* B_0}{2\pi c} \left(\frac{R_*}{r}\right)^3 \left\{ \frac{9}{8} \frac{\Omega_*^2}{R_*} (\sigma_e - \sigma) \right\}$$

cette valeur est donc positive puisque $\sigma > \sigma_2$.

Ceci signifie que la densité des faisceaux d'électrons est trop forte ; ils ne peuvent générer eux-mêmes un plasma "force-free". L'excès de charges négatives doit donc être compensé par des charges positives. On en déduit que les faisceaux d'électrons entre dans un plasma qui a localement un excès de charges positives.

Une telle situation est a rapprocher de celle pouvant exister dans le modèle de Goldreich et Julian où le plasma magnétosphérique n'est pas neutre et peut être traversé par des courants dont la densité de charge à un signe opposé à celui de la densité du plasma (voir remarque 1) p. (10)).

***

V - RESUME ET CONCLUSION

Dans ce travail sont étudiés différentes possibilités d'existence d'un plasma magnétosphérique d'extension finie autour d'une étoile à neutrons. L'étoile est considérée comme une sphère de plasma parfaitement conducteur en rotation rigide, qui génère un intense champ magnétique dipolaire. La configuration considérée est celle dans laquelle l'axe de symétrie du champ magnétique coïncide avec l'axe de rotation de l'étoile. Une telle étoile, parce qu'elle émet des électrons, ne peut rester dans le vide. Le plasma magnétosphérique autour de l'étoile électriquement neutre proposé par Goldreich et Julian (1969), bien que limité par le cylindre de lumière, possède une extension infinie.

L'étude du potentiel électrique créé dans le vide par l'étoile chargée positivement, montre que si la charge est suffisante elle peut empêcher les électrons émis par les zones polaires de quitter la magnétosphère. Le potentiel électrique fixe une distance limite précise que les électrons en mouvement sur les lignes de champ, ne peuvent dépasser. Ceci donne l'idée d'un plasma magnétosphérique d'extension finie. Un tel plasma, s'il est parfaitement conducteur est limité par une surface de séparation plasma-vide sur laquelle $\vec{E}.\vec{B} = 0$. Le plasma et la surface sont dits "force-free". La solution pour le potentiel électrique du vide doit donc posséder une telle surface, soit fermée, soit se fermant sur l'étoile. Le problème de l'émission d'électrons par la surface de l'étoile est donc reporté à la surface de séparation plasma-vide. Le fait qu'il n'existe pas de solution physiquement acceptable pour le potentiel du vide assurant la condition $\vec{E}.\vec{B} = 0$ à la surface de l'étoile, n'est pas lié à la forme de la surface mais au type de potentiel engendré par un plasma "force-free" en rotation rigide (Pilipp (1974)). Ceci exige qu'un plasma magnétosphérique "force-free" ne soit pas partout en contact avec l'étoile. L'étude du potentiel électrique régnant dans une zone de vide séparant le plasma des zones polaires de l'étoile (gap) montre qu'une telle configuration ne peut exister et être stable vis à vis des créations de paires électron-positron.

Cette configuration incluant un gap, est "force-free" au sens large, c'est à dire telle que $\rho\ (\vec{E}.\vec{B}) = 0$ partout. L'existence d'un plasma magnétosphérique nécessite donc l'abandon de cette condition. D'une conception statique ($\vec{E}.\vec{B} = 0$) du plasma magnétosphérique il faut donc passer à une conception dynamique ($\vec{E}.\vec{B} \neq 0$). Ceci est renforcé par le résultat de Scharlemann et al (1978) qui montrent que les électrons émis par la calotte polaire de l'étoile, dans le tube des lignes ouvertes limité par un plasma en corotation, ne peuvent quitter la magnétosphère. L'examen du cas simple d'un plasma non "force-free" uniquement constitué de faisceaux d'électrons émis par l'étoile (dans le tube des lignes ouvertes limité par un plasma en corotation) et réfléchis à distance finie, conduit à une impossibilité : le potentiel du vide qui s'étend au delà de cette zone de faisceaux, crée un champ électrique à la surface de séparation, qui tend à arracher les électrons. Le modèle plus réaliste qui s'impose donc est celui dans lequel l'étoile échange des électrons (qui se déplacent le long des lignes ouvertes) avec une zone de plasma magnétosphérique "force-free" s'étendant au dessus de la calotte polaire. Ceci est à la fois la continuation du raisonnement sur les modèles avec faisceaux et une solution au problème du gap instable (l'instabilité se traduisant par des faisceaux de particules chargées). Le calcul du potentiel électrique qui règne dans cette zone "force-free" permet de déterminer sa vitesse de drift électromagnétique et sa densité de charge. Le dernier résultat montre que les faisceaux d'électrons doivent pénétrer dans une zone possédant un excès de charges positif. Une circonstance analogue est impliquée par le modèle de plasma magnétosphérique de Goldreich et Julian.

***

REFERENCES

1. Arons, J., 1979 Space Sci. Rev. 24, 473.

2. Eastlund, B.J., 1968 Nature 218, 731.
1970 Nature 225, 430

3. Fawley, W.M., Arons, J., Scharleman , E.T., 1977 ApJ 217, 227.

4. Ginzburg, V., Zheleznyakov, V.V., Zaĭtsev, V.V., 1969, Astroph. Space Sci. 4, 464.

5. Gold, T., 1968, Nature 218, 731.

6. Goldreich, P., Julian, W.H., 1969 ApJ 157, 869.

7. Jackson, E.A., 1976 ApJ 206, 831.

8. Jackson, E.A., 1979 ApJ 227, 266.

9. Jackson, E.A., 1980 ApJ 237,198.

10. Jackson, J.D., Classical Electrodynamic, Wiley et Sons, 2 ed.

11. Kellog, O.D. 1967 "Fondation of Potential Theory" in Mathematisches Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin.

12. Manchester, R.N., Taylor J.H., "Pulsars" W.H. Freeman editor.

13. Mestel, L., Phillips, P., Wang, Y.M., 1979 Mont. Not. Astr. Soc. 188, 385.

14. Michel, F.C., 1979 ApJ 227, 579.

15. Michel, F.C., 1980 Astr. and Space Sci. 72, 175.

16. Michel, F.C., Pellat, R., 1981 IAU Symposium "Pulsars" 37. W. Sieber and R. Wielebinski editors.

17. Morse, P.M., Feshbach, H., 1953, "Methods of theorical physics" Mc Graw Hill Book Company, part I, p. 825.

18. Pacini, F., 1967, Nature 216, 567.

19. Pilipp, W.G., 1974 ApJ 190, 391.

20. Radhakrishnan, V., Cooke, D.J., Komesaroff, M.M., Morris, D., 1969 Nature 221, 443.

21. Ruderman, M.A., Sutherland, P.G., 1975 ApJ 196, 51.

22. Scharleman , E.T., Arons, J., Fawley, W.M., 1978 ApJ 232, 297.

23. Smith, F.G., 1970 Mon. Not. Roy Astr. Soc. 149, 1.

24. Sturrock, P.A., 1971 ApJ 164, 529.

25. Watson, C.N., 1966 "A treatise on the theory of Bessel function". Cambridge University Press.

DEUXIEME PARTIE

I - INTRODUCTION

De nombreux phénomènes, tant en Astrophysique, telles les éruptions solaires, qu'en Géophysique, tel le vent solaire dans le sillage de la Terre, ou qu'au laboratoire, telles les difficultés de confinement d'un plasma, ont mis en évidence des processus liés à des modification de topologie du champ magnétique au sein d'un plasma, et montré l'importance des zones de reconnection des lignes de champ.

Pour étudier les propriétés fondamentales d'un plasma placé dans une zone de reconnection d'un champ magnétique, on utilise la configuration de base montrée dans la Fig. 1 (Chapman, Kendall 1962 ; Imshennik et Syrovatskii 1967). Dans cette configuration le champ magnétique $\vec{B}$ est confiné dans un plan (plan (xy)) et les lignes de champ sont des hyperboles centrées sur l'origine. Le champ magnétique a pour expression générale, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a}\left(y\vec{i} + x\vec{j}\right)$$

et le potentiel vecteur correspondant s'écrit :

$$\vec{A} = -\frac{B_0}{2a}\left(x^2 - y^2\right)$$

Les lignes de champ sont les hyperboles d'équation x^2-y^2 = constante. Dans cette configuration l'origine est un point nul de type X (l'axe $\vec{z}$ étant une ligne nulle dans l'espace).

On sait que le mouvement d'un plasma dans un champ magnétique modifie ce champ lui-même sous l'effet des courants induits qui apparaissent. Ainsi le champ magnétique et les différentes grandeurs qui définissent l'état du fluide sont en général des fonctions du temps. Pour la configuration proposée ci-dessus, il existe des solutions exactes (dependantes du temps) des équations de la magnétohydrodynamique.

Chapman et Kendall [1] ont donné une solution pour un fluide parfaitement conducteur et incompressible, limité initialement à un cylindre dont l'axe coincide avec la ligne neutre. Imshennik et Syrovatskii [2] ont donné une solution pour un fluide parfaitement conducteur compressible mais d'extension infinie.

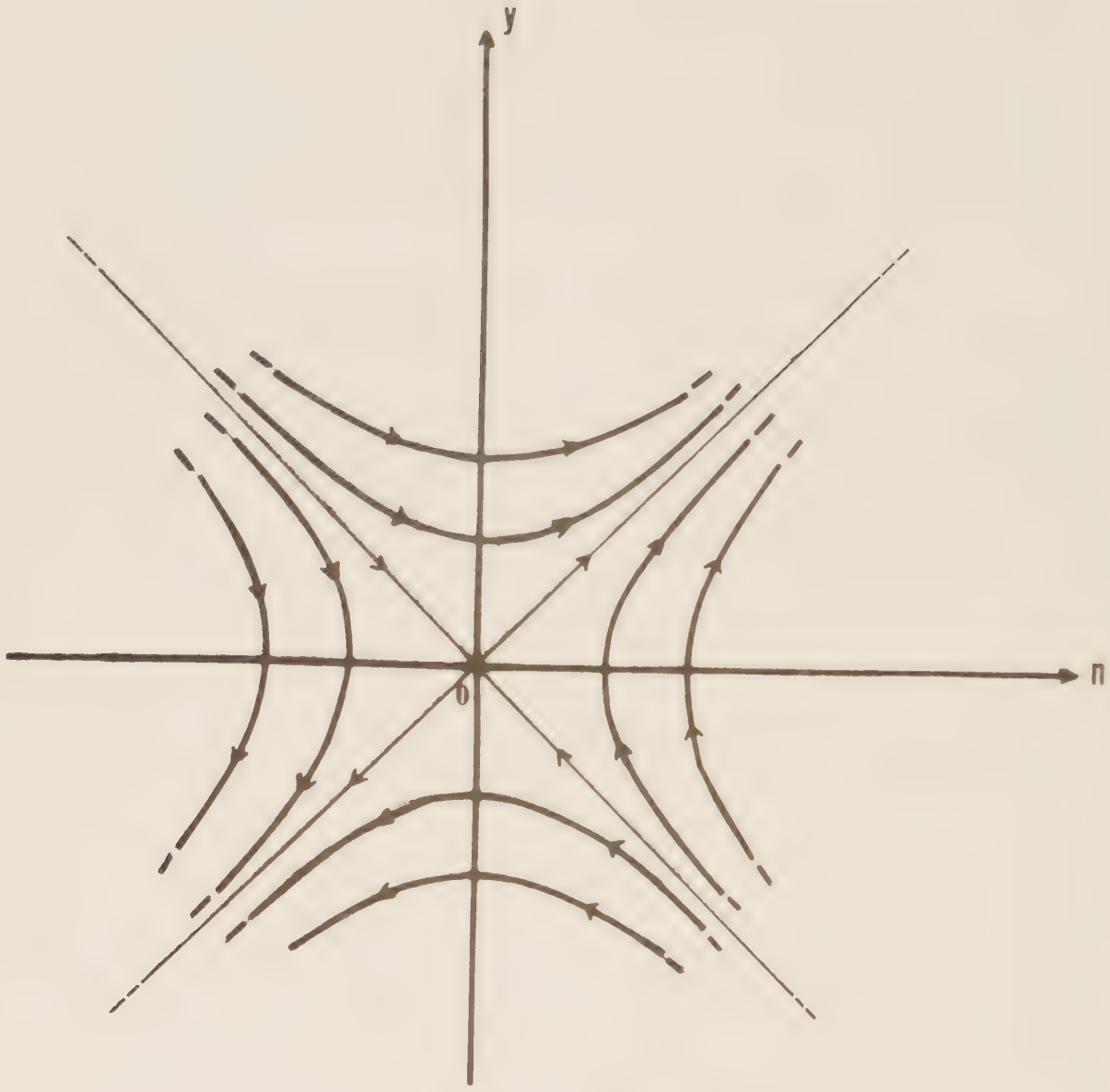


Fig. 1

Configuration hyperbolique des lignes de champ magnétique dans le plan (x,y). Le point 0 est un point neutre du type X.

Dans ce travail on montre que l'on peut écrire une solution plus générale qui peut se ramener par un choix de constantes ou de conditions aux limites aux solutions des auteurs précités. Dans la partie II nous établissons les équations de la magnétohydrodynamique particularisées au problème qui nous occupe. Dans la partie III nous explicitons la solution générale en donnant l'expression du potentiel vecteur magnétique fonction du temps, ainsi que les expressions, dépendantes du temps également, des grandeurs qui définissent l'état du fluide (vitesse, densité, pression). Dans la partie IV, nous étudions de façon plus détaillée le cas d'un fluide compressible limité initialement à un cylindre dont l'axe coincide avec la ligne neutre et montrons comment, en comparaison avec le cas du fluide incompressible traité par Chapman et Kendall, la variation de la densité au cours du temps entraine une modification du champ magnétique et l'apparition d'un courant de surface à la limite du fluide. Ceci est à rapprocher des fines couches de courant observées dans des simulations numériques [4]. La partie V conclut ce travail en indiquant l'existence d'une nouvelle phase possible dans l'évolution du fluide, lorsque les effets résistifs ne sont plus négligeables.

***

II - EQUATIONS DE LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

Lors des mouvements hydrodynamiques d'un fluide conducteur placé dans un champ magnétique, un champ électrique et des courants sont induits. Les courants ont pour effet de modifier le champ magnétique total et donc de modifier le mouvement du fluide. Ainsi apparait une interaction des effets magnétiques et hydrodynamique qui se traduit par un couplage des équations du champ électromagnétique et des équations du mouvement. Dans le cas très général où l'échelle de temps de variation du champ est grande par rapport au temps de libre parcours des charges, on peut négliger le courant de déplacement dans la loi d'Ampère et ignorer également la loi de Coulomb. Une telle approximation porte le nom de magnétohydrodynamique.

Dans le paragraphe 1) nous rappelons les équations générales de la magnétohydrodynamique puis, dans le paragraphe 2) nous en déduisons les équations spécifiques qui décrivent le comportement d'un fluide parfaitement conducteur placé dans un champ magnétique de configuration hyperbolique.

1. Les équations générales de la magnétohydrodynamique

Ces équations relient les grandeurs décrivant le champ électromagnétique, c'est à dire les champs électrique et magnétique, le potentiel vecteur et la densité de courant, aux grandeurs décrivant le fluide, c'est à dire la densité de matière, la pression et la vitesse. Toutes ces grandeurs dépendent en général des coordonnées cartésiennes x,y,z et du temps t.

Les notations utilisées par la suite sont :

$\vec{E}(x,y,z,t)$: champ électrique
$\vec{B}(x,y,z,t)$: champ magnétique
$\vec{A}(x,y,z,t)$: potentiel magnétique
$\vec{J}(x,y,z,t)$: densité de courant
σ : conductivité
$\rho(x,y,z,t)$: densité de matière
$p(x,y,z,t)$: pression
$\vec{v}(x,y,z,t)$: vitesse du fluide

Equations de Maxwell

Dans l'approximation MHD, le champ électromagnétique satisfait aux équations :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \end{cases} \tag{1}$$

$\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$ sont respectivement le champ électrique, le champ magnétique et la densité de courant qui règnent dans le fluide.

La densité de courant est liée aux champs électrique et magnétique par la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}\right) \tag{2}$$

Dans la limite d'un fluide parfaitement conducteur, cette dernière équation impose

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \tag{3}$$

On peut exprimer les équations (1) et (2) en fonction du potentiel vecteur A défini par

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \tag{4}$$

Dans la jauge $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ on obtient

$$\begin{cases} \text{a)} \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \text{b)} \quad \vec{J} = -\frac{c}{4\pi}\Delta\vec{A} \\ \text{c)} \quad \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} \end{cases} \tag{5}$$

Dans la dernière équation la notation $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée convective :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla} \qquad (6)$$

Equations hydrodynamiques

Si les forces de viscosité et de gravitation sont négligeables devant les forces électromagnétiques et de pression, l'équation hydrodynamique du mouvement du fluide s'écrit

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{c} \vec{J} \wedge \vec{B} \qquad (7)$$

La conservation de la matière se traduit par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \qquad (8)$$

A ces deux équations il faut ajouter une équation d'état. Pour un fluide en mouvement adiabatique

$$\frac{d}{dt} \left(P/\rho^{\gamma} \right) = 0 \qquad (9)$$

2. Spécification du problème

La solution des équations magnétohydrodynamiques que nous allons chercher se situe dans le cadre suivant :
On considère un fluide parfaitement conducteur placé dans un champ magnétique permanent dérivant du potentiel vecteur :
(en coordonnées cartésiennes x,y,z)

$$\vec{A}_o = \frac{H_o}{a_o} \left(y^2 - x^2 \right) \vec{k} \qquad (10)$$

où $\vec{k}$ désigne le vecteur unitaire de l'axe z.

H_o est une constante homogène à un champ magnétique.

a_o est une constante homogène à une longueur.

Le champ magnétique permanent a donc pour expression

$$\vec{B}_o = \frac{2H_o}{a_o}\left(y\vec{i} + x\vec{j}\right) \tag{11}$$

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignent respectivement les vecteurs unitaires des axes x et y.

Dans la suite, nous nous intéresserons à un mouvement bidimentionnel du fluide dans le plan (x,y). D'où

$$\vec{V} = v_x(x,y,t)\,\vec{i} + v_y(x,y,t)\,\vec{j} \tag{12}$$

Etant donnée la symétrie du problème la solution cherchée pour le potentiel vecteur doit être du type :

$$\vec{A} = A(x,y,t)\,\vec{k} \tag{13}$$

Ce potentiel vecteur doit satisfaire l'équation déduite de 5,c) dans le cas d'une conductivité infinie, c'est à dire :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \tag{14}$$

Dans ces conditions on peut écrire explicitement les composantes cartésiennes du champ magnétique

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0\right) \tag{15}$$

et les équations du mouvement sur les axes x,y

$$\rho\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\Delta A \tag{16}$$

$$\rho\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial A}{\partial y}\cdot\Delta A \tag{17}$$

L'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \tag{18}$$

Les équations (14), (16), (17), (18) complétées par une équation d'état constituent le système complet régissant le mouvement du fluide.

La solution pour le potentiel vecteur doit de plus satisfaire à la condition initiale

$$\vec{A}\,(x, y, t=0) = \vec{A}_0 \tag{19}$$

Si le fluide est limité par une surface S(x,y,t) il faudra imposer la condition supplémentaire sur la pression :

$$p(S) = 0 \tag{20}$$

***

III - SOLUTION EXACTE

Dans cette partie nous allons construire une solution exacte du système d'équations établi au paragraphe précédent.

Ce système admet la solution triviale dans laquelle la vitesse du fluide est nulle et la pression isotrope. Le potentiel vecteur est dans ce cas celui établi initialement. Cependant, comme il l'a été indiqué dans l'introduction un tel état est instable. Une légère perturbation du fluide entraine une évolution de l'ensemble fluide-champ magnétique. Nous allons donc nous intéresser à une solution générale dans laquelle la vitesse, la pression et la densité du fluide dépendent du temps, ainsi que le champ magnétique.

Suivant les résultats de Imshennik et Syrovatskii nous allons chercher une solution pour le potentiel vecteur du type général :

$$\vec{A} = H_0 \left(-\frac{x^2}{a(t)} + \frac{y^2}{b(t)} \right) \vec{k} \qquad (21)$$

où H_0 est une constante homogène à un champ magnétique et a(t), b(t) deux fonctions du temps homogènes à une longueur.

Ce potentiel devant vérifier l'équation (14) les fonctions a(t) et b(t) doivent vérifier la relation suivante :

$$x^2 \frac{\dot{a}}{a^2} - y^2 \frac{\dot{b}}{b^2} - v_x \frac{\ell x}{a} + v_y \frac{\ell y}{b} = 0.$$

où $\dot{a}$ et $\dot{b}$ désignent les dérivées par rapport au temps des fonctions a et b respectivement.
De cette dernière équation on peut tirer

$$\begin{cases} x \frac{\dot{a}}{a} - \ell v_x = 0 \\ -y \frac{\dot{b}}{b} + \ell v_y = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont vérifiées par la solution générale

$$\begin{cases} a(t) = a_0 e^{\ell \delta(t)} \\ b(t) = b_0 e^{\ell \tau(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{s}(t)\, x \\ v_y = \dot{\tau}(t)\, y \end{cases} \qquad (22)$$

où $s(t)$ et $\tau(t)$ sont deux fonctions du temps pour le moment quelconques. a_o et b_o sont deux constantes homogènes à une longueur.

Le potentiel vecteur (21) peut donc s'écrire

$$\vec{A} = H_o \left(-\frac{x^2}{a_o e^{2s}} + \frac{y^2}{b_o e^{2\tau}} \right) \vec{k} \qquad (23)$$

Les expressions (22) et (23) montrent qu'une configuration initiale du type (10) dans laquelle le fluide serait immobile, est bien instable En effet, une perturbation de la vitesse correspond à une valeur non nulle de $\dot{s}(t=0)$ ou (et) $\dot{\tau}(t=0)$ et donc conduit à une évolution du potentiel suivant (23).

Nous pouvons maintenant déterminer une solution pour la densité de matière $\rho(\vec{r},t)$. En reportant les expressions (22) de la vitesse dans l'équation de continuité (18) on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{s}(t)\, x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \dot{\tau}(t)\, y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\dot{s}(t) + \dot{\tau}(t) \right) = 0$$

Cette équation admet une solution simple dans laquelle ρ ne dépend que du temps :

$$\rho = \rho_o\, e^{-(s+\tau)} \qquad (24)$$

Les expressions (22) de la vitesse, (23) du potentiel et (24) de la densité permettent d'écrire les équations qui régissent la pression $p(\vec{r},t)$:

$$\rho \left(\ddot{s}\, x + \dot{s}^2 x \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \Delta A$$

$$\rho \left(\ddot{\tau}\, y + \dot{\tau}^2 y \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \Delta A$$

Compte tenu du fait que ni ρ ni ΔA ne dépendent des coordonnées, on peut réécrire ces équations sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\rho(\ddot{s}+\dot{s}^2)x^2 + \frac{1}{4\pi}\Delta A \cdot A\right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\rho(\ddot{\tau}+\dot{\tau}^2)y^2 + \frac{1}{4\pi}\Delta A \cdot A\right]$$

On peut obtenir facilement l'expression de la pression par intégration :

$$p = -\frac{1}{2}\rho\left[(\ddot{s}+\dot{s}^2)x^2 + (\ddot{\tau}+\dot{\tau}^2)y^2\right] - \frac{1}{4\pi}\Delta A \cdot A + f(t) \quad (25)$$

Soit explicitement, en regroupant les termes en x^2 d'une part et en y^2 d'autre part :

$$p = \frac{x^2}{a_0 e^{2s}}\left[-\frac{1}{2}\rho_0 a_0(\ddot{s}+\dot{s}^2)e^{s-\tau} + \frac{H_0^2}{2\pi}\left(\frac{1}{b_0 e^{2\tau}} - \frac{1}{a_0 e^{2s}}\right)\right]$$
$$+ \frac{y^2}{b_0 e^{2\tau}}\left[-\frac{1}{2}\rho_0 b_0(\ddot{\tau}+\dot{\tau}^2)e^{\tau-s} - \frac{H_0^2}{2\pi}\left(\frac{1}{b_0 e^{2\tau}} - \frac{1}{a_0 e^{2s}}\right)\right]$$
$$+ f(t) \quad (26)$$

Les fonctions $s(t)$ et $\tau(t)$ qui apparaissent ainsi que leurs dérivées dans les différentes expressions obtenues, doivent satisfaire deux équations différentielles. On les obtient en utilisant l'équation d'adiabaticité :

$$\frac{d}{dt}\left(p/\rho^\gamma\right) = 0 \quad (9)$$

Réécrivons la pression sous la forme :

$$p = f(t) + \frac{x^2}{a_0 e^{2s}} h(t) + \frac{y^2}{b_0 e^{2\tau}} g(t) \quad (27)$$

En reportant cette expression, ainsi que celle de la densité (24) dans l'équation d'état (9), on obtient :

$$\dot f(t) + \dot h(t)\frac{x^2}{a_0 e^{2s}} + \dot g(t)\frac{y^2}{b_0 e^{2\tau}} = -\gamma(\dot s+\dot\tau)\left(f(t) + h(t)\frac{x^2}{a_0 e^{2s}} + g(t)\frac{y^2}{b_0 e^{2\tau}}\right)$$

Chacune des fonctions f(t), h(t), g(t) vérifie donc l'équation différentielle

$$\dot\varphi + \gamma(\dot s+\dot\tau)\,\varphi = 0$$

D'où

$$\begin{cases} f(t) = f_0\, e^{-\gamma(s+\tau)} \\ g(t) = g_0\, e^{-\gamma(s+\tau)} \\ h(t) = h_0\, e^{-\gamma(s+\tau)} \end{cases} \qquad (28)$$

La pression s'écrit donc

$$p = \left(f_0 + h_0\frac{x^2}{a_0 e^{2s}} + g_0\frac{y^2}{b_0 e^{2\tau}}\right) e^{-\gamma(s+\tau)} \qquad (29)$$

et les fonctions s(t) et τ(t) vérifient les équations différentielles :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\rho_0 a_0\left(\ddot s + \dot s^2\right)e^{s-\tau} + \frac{H_0^2}{2\pi}\left(\frac{1}{b_0 e^{2\tau}} - \frac{1}{a_0 e^{2s}}\right) = h_0\, e^{-\gamma(s+\tau)} \\ -\frac{1}{2}\rho_0 b_0\left(\ddot\tau + \dot\tau^2\right)e^{\tau-s} - \frac{H_0^2}{2\pi}\left(\frac{1}{b_0 e^{2\tau}} - \frac{1}{a_0 e^{2s}}\right) = g_0\, e^{-\gamma(s+\tau)} \end{cases} \qquad (30)$$

Les constantes f_0, h_0 et g_0 étant déterminées par les conditions aux limites imposées sur la pression.

***

IV - SOLUTION COMPLETE POUR UN FLUIDE D'EXTENSION FINIE

Nous allons étudier dans cette partie le cas d'un fluide compréssible placé dans les conditions analogues à celles choisies par Chapman et Kendall. Nous allons donc considérer un cylindre de fluide dont l'axe coincide avec la ligne neutre d'un champ magnétique permanent dont le potentiel vecteur est :

$$\vec{A}_o = \frac{H_o}{a_o}\left(y^2 - x^2\right)\vec{k} \tag{31}$$

La solution générale (23) donnant le potentiel du champ magnétique total intérieur, c'est à dire dans le fluide, est donc, compte tenu de la condition initiale $\vec{A}(x,y,\ t=0) = \vec{A}_o$, :

$$\vec{A} = \frac{H_o}{a_o}\left(\frac{y^2}{e^{2\tau}} - \frac{x^2}{e^{2s}}\right)\vec{k} \tag{32}$$

Cette expression est donc déduite de la solution générale dans le cas $b_o = a_o$, avec les conditions initiales sur les fonctions $s(t)$ et (t) :

$$\begin{cases} s(t=0) = 0 \\ \tau(t=0) = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Une solution complète est donnée si on détermine également le potentiel vecteur qui règne à l'extérieur, c'est à dire dans le vide. Les conditions qu'il faut imposer au champ extérieur sont :

a) la convergence à l'infini

b) la continuité de la composante normale du champ magnétique à la transition fluide-vide.

D'autre part, le fait que le fluide est d'extension finie, impose à la pression d'être nulle à la surface limite :

$$p(S) = 0 \tag{20}$$

En conséquence, il existe nécessairement un gradient de pression dans le fluide, et les constantes f_o , g_o , h_o qui apparaissent dans l'expression de la pression (29) et dans les équations différentielles (30), ne sont plus indépendantes.

Dans le premier paragraphe nous précisons le comportement des grandeurs qui définissent le mouvement du fluide lorsqu'on impose la condition (20). Dans le second paragraphe nous déterminons le potentiel vecteur extérieur au fluide.

1. Solution intérieure

Le potentiel magnétique est donné par (32). La densité de matière est toujours une fonction du temps

$$\rho = \rho_0 e^{-(\alpha+\tau)} \tag{24}$$

Du fait que le fluide est limité par une surface S, la pression doit satisfaire à la condition (20) :

$$p(S) = 0 \tag{20}$$

Mais cette surface évolue au cours du temps. Déterminons l'équation $S(x,y,t) = 0$ de cette surface. Les expressions (22) montrent que toute fonction arbitraire de x et y du type

$$\Phi\left(\frac{x^2}{e^{2\alpha}}, \frac{y^2}{e^{2\tau}}\right) = cste \tag{34}$$

détermine une ligne sur laquelle les mêmes particules du fluide restent situées tout au long de l'évolution du système.
En effet si à l'instant t, les particules occupent la position x,y vérifiant (34), à un instant t+dt les positions sont devenues (d'après (22)) :

$$x(t+dt) = x(t) + \dot{\alpha} x(t)\, dt = (1 + \dot{\alpha}\, dt)\, x(t)$$

$$y(t+dt) = y(t) + \dot{\tau} y(t)\, dt = (1 + \dot{\tau}\, dt)\, y(t)$$

il est facile de vérifier que les coordonnées x(t+dt) et y(t+dt) vérifient l'équation :

$$\Phi\left(\frac{x^2(t+dt)}{e^{2s(t+dt)}}\ ,\ \frac{y^2(t+dt)}{e^{2\tau(t+dt)}}\right) = \text{cte}.$$

Nous pouvons appliquer ce résultat à la surface qui limite le fluide. Si a_o désigne maintenant le rayon du cylindre initial, la surface de celui-ci a pour équation :

$$\frac{x^2}{a_o^2} + \frac{y^2}{a_o^2} - 1 = 0$$

A une date ultérieure, les particules qui limitent le fluide se trouvent donc sur la surface S d'équation :

$$\frac{x^2}{a_o^2 e^{2s}} + \frac{y^2}{b_o^2 e^{2\tau}} - 1 = 0 \qquad (35)$$

La condition $p(S) = 0$ écrite à l'aide de l'expression de la pression (29) particularisée au cas $b_o = a_o$, et de l'équation (35) de la surface, permet de relier les valeurs f_o, g_o, h_o ;

$$f_o + h_o \frac{x^2}{a_o e^{2s}} + g_o\left(a_o - \frac{x^2}{a_o e^{2s}}\right) = 0.$$

d'où
$$\begin{cases} f_o + a_o g_o = 0 \\ h_o - g_o = 0 \end{cases}$$

Posons $f_o = p_o$, l'équation de la pression (29) devient

$$p = p_o\left(1 - \frac{x^2}{a_o^2 e^{2s}} - \frac{y^2}{b_o e^{2\tau}}\right) e^{-\gamma(s+\tau)} \qquad (36)$$

En conséquence, les équations différentielles (30) qui régissent les fonctions $s(t)$ et $\tau(t)$ deviennent dans ce cas :

$$\frac{1}{2}\rho_0 a_0^2 \left(\ddot{s}+\dot{s}^2\right)e^{s-\tau} - \frac{H_0^2}{2\pi}\left(e^{-2\tau}-e^{-2s}\right) = p_0 e^{-\gamma(s+\tau)}$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 a_0^2 \left(\ddot{\tau}+\dot{\tau}^2\right)e^{\tau-s} + \frac{H_0^2}{2\pi}\left(e^{-2\tau}-e^{-2s}\right) = p_0 e^{-\gamma(s+\tau)} \qquad (37)$$

D'où l'on déduit une équation indépendante de la constante p_0 :

$$\left(\ddot{s}+\dot{s}^2\right)e^{s-\tau} - \left(\ddot{\tau}+\dot{\tau}^2\right)e^{\tau-s} = \frac{2H_0^2}{\pi\rho_0 a_0^2}\left(e^{-2\tau}-e^{-2s}\right) \qquad (38)$$

Cas incompressible : $\rho = \rho_0$

Pour terminer ce paragraphe, nous démontrons les résultats donnés par Chapman et Kendall [1] dans le cas du cylindre de fluide incompressible.

Le cas incompressible est obtenu à partir de la solution générale lorsque $\tau = -s$. L'expression (24) de la densité se réduisant à $\rho = \rho_0$.

Le potentiel magnétique prend dans ce cas la forme :

$$\vec{A} = \frac{H_0}{a_0}\left(\frac{y^2}{e^{-2s}} - \frac{x^2}{e^{2s}}\right)\vec{k} \qquad (39)$$

où la fonction s(t) peut être considérée sans perte de généralité comme une fonction croissante du temps.

Pour déterminer la pression on ne peut plus utiliser l'équation d'adiabaticité (9), mais la seule condition $p(S) = 0$ à la limite du fluide permet de déduire l'équation différentielle que satisfait s(t).

En effet la pression est de la forme :

$$p = f(t) + \frac{x^2}{a_0 e^{2s}} h(t) + \frac{y^2}{a_0 e^{-2s}} g(t) \qquad (40)$$

Les fonctions h(t) et g(t) sont déduites de l'expression générale (26) dans le cas $a_o = b_o$, $\tau = -s$.

Pour que la condition (20) soit satisfaite il faut que la pression soit de la forme

$$p = f(t)\left(1 - \frac{x^2}{a_o^2 e^{2s}} - \frac{y^2}{a_o^2 e^{-2s}}\right) \qquad (41)$$

Soit $h(t) = g(t)$ (42)

Cette équation correspond évidemment à l'équation (38) particularisée au cas $\tau = -s$, soit :

$$(\ddot{s} + \dot{s}^2)e^{2s} - (-\ddot{s} + \dot{s}^2)e^{-2s} = \frac{2H_o}{\pi \rho_o a_o^2}\left(e^{2s} - e^{-2s}\right)$$

$$\ddot{s}\,\mathrm{ch}\,2s + \dot{s}^2\,\mathrm{sh}\,2s = \frac{2H_o^2}{\pi \rho_o a_o^2}\,\mathrm{sh}\,2s.$$

d'où la forme donnée par Chapman et Kendall [1]

$$\ddot{s} = \left(\frac{2H_o^2}{\pi \rho_o a_o^2} - \dot{s}^2\right)\mathrm{th}\,2s$$

A l'aide de cette équation différentielle on peut transformer l'expression de la fonction f(t).

On a, d'après (40) et (41) : $f(t) = -a_o h(t) = -a_o g(t)$, soit :

$$f(t) = \frac{1}{2}\rho_o a_o^2(\ddot{s} + \dot{s}^2)e^{2s} - \frac{H_o^2}{2\pi}\left(e^{2s} - e^{-2s}\right)$$

et

$$f(t) = \frac{1}{2}\rho_o a_o^2(-\ddot{s} + \dot{s}^2)e^{-2s} + \frac{H_o^2}{2\pi}\left(e^{2s} - e^{-2s}\right)$$

Par somme membre à membre on obtient

$$2f(t) = \rho_0 a_0^2 \left[\ddot{s} \operatorname{sh} 2s + \dot{s}^2 \operatorname{ch} 2s \right]$$

D'où d'après (42)

$$f(t) = \frac{1}{2} \rho_0 a_0^2 \left[\left(\frac{2H_0^2}{\pi \rho_0 a_0^2} - \dot{s}^2 \right) \operatorname{th} 2s \operatorname{sh} 2s + \dot{s}^2 \operatorname{ch} 2s \right]$$

$$f(t) = \left[\frac{H_0^2}{\pi} \operatorname{sh}^2 2s + \frac{1}{2} \rho_0 a_0^2 \right] (\operatorname{ch} 2s)^{-1}$$

L'expression de la pression en fonction des coordonnées et du temps, lorsque $\rho = \rho_0$, est finalement :

$$p = \left(\frac{H_0^2}{\pi} \operatorname{sh}^2 2s + \frac{1}{2} \rho_0 a_0^2 \right) (\operatorname{ch} 2s)^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2 e^{2s}} - \frac{y^2}{a_0^2 e^{-2s}} \right) \quad (42)$$

Les courbes isobares sont les ellipses d'équation :

$$\frac{x^2}{a_0^2 e^{2s}} + \frac{y^2}{a_0^2 e^{-2s}} - k = 0 \qquad (k < 1)$$

Sur une telle ellipse qui suit le mouvement du fluide, la pression croît au cours du temps avec la fonction $s(t)$.

2. Solution extérieure

Le calcul du potentiel magnétique $\vec{A}$ extérieur au fluide, c'est à dire régnant dans le vide qui entoure le cylindre elliptique de fluide, peut se faire aisément en utilisant les coordonnées elliptiques. Dans le paragraphe a) nous rappelons les définitions de ces coordonnées et donnons les expressions correspondantes des opérateurs utilisés par la suite. Dans le paragraphe b) nous calculons dans ces coordonnées le potentiel vecteur extérieur dans le cas incompressible $\rho = \rho_0$ (cas Chapman et Kendall) et montrons que le champ magnétique est continu grâce à l'évolution particulière de la surface du fluide. Dans le

paragraphe c) nous déterminons par la même méthode le potentiel extérieur dans le cas compressible $\rho = \rho_0 e^{-(\sigma+\tau)}$ et la densité de courant de surface qui apparait à la surface limite du fluide du fait de l'évolution plus complexe de cette surface.

a) coordonnées elliptiques

Les coordonnées elliptiques du plan xy, notées μ et θ sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations (complément de mathématiques A. Angot, 5ème édition, p. 142) :

$$\begin{cases} x = \lambda \, ch\mu \cos\theta \\ y = \lambda \, sh\mu \sin\theta \end{cases} \tag{43}$$

La coordonnée μ définit l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{\lambda^2 ch^2\mu} + \frac{y^2}{\lambda^2 sh^2\mu} - 1 = 0 \tag{44}$$

Dans ces coordonnées le champ magnétique défini par (4) a pour composantes :

$$B_\mu = \frac{1}{\lambda D} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}$$

$$B_\theta = \frac{\partial A_\mu}{\partial z} - \frac{1}{\lambda D} \frac{\partial A_z}{\partial \mu}$$

$$B_z = \frac{1}{\lambda D^3}\left(sh\mu \, ch\mu \, A_\theta - \sin\theta\cos\theta A_\mu\right) + \frac{1}{\lambda D}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial \theta}\right)$$

avec $D = \left(ch^2\mu - \cos^2\theta\right)^{1/2}$ (45)

Dans le cas d'un potentiel magnétique du type (13), les relations ci-dessus se réduisent à :

$$\begin{cases} B_\mu = \dfrac{1}{\lambda D} \dfrac{\partial A}{\partial \theta} \\ B_\theta = \dfrac{1}{\lambda D} \dfrac{\partial A}{\partial \mu} \\ B_z = 0 \end{cases} \tag{46}$$

Dans les coordonnées elliptiques le Laplacien Δ s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2 D^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Donc, d'après 5,b) et (13), le potentiel magnétique extérieur doit satisfaire l'équation simple

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0 \tag{47}$$

b) cas incompressible $\rho = \rho_0$

Dans ce paragraphe nous allons reprendre le cas du fluide incompressible traité par Chapman et Kendall [1] pour déterminer le potentiel magnétique extérieur à l'aide des coordonnées elliptiques. Nous montrons en calculant la part du potentiel créée par les courants induits, à l'instar des auteurs précédents, que le champ magnétique est bien continu à la surface de séparation fluide-vide.

Le potentiel intérieur qui est défini par l'équation (39) représente la somme du potentiel A_0 défini par (31) et du potentiel créé par les courants induits du fait du mouvement du fluide.
Le potentiel intérieur induit par les courants, que nous noterons dès lors $\vec{A}^i$ a donc pour expression

$$\vec{A}^i = A^i(x, y, t)\ \vec{k} \tag{48}$$

$$A^i = \frac{H_0}{a_0}\left(\frac{y^2}{e^{-2s}} - \frac{x^2}{e^{2s}} - y^2 + x^2\right) \tag{49}$$

$$A^i = \frac{2H_0}{a_0}\left(x^2 e^{-s} + y^2 e^{s}\right) \operatorname{sh} s \tag{50}$$

En coordonnées elliptiques :

$$A^i = \frac{2H_0 d^2}{a_0}\left(\operatorname{ch}^2\mu \cos^2\theta\, e^{-s} + \operatorname{sh}^2\mu \sin^2\theta\, e^{s}\right) \operatorname{sh} s \tag{51}$$

Les composantes du champ magnétique intérieur induit par les courants étant proportionnelles aux dérivées partielles du potentiel A, suivant (46), nous explicitons leur expression :

$$\frac{\partial A^i}{\partial \mu} = \frac{2H_0 d^2}{a_0} \operatorname{ch}\mu \operatorname{sh}\mu \left(2\sin^2\theta\, e^{s} + 2\cos^2\theta\, e^{-s}\right) \operatorname{sh} s$$

$$= \frac{H_0 d^2}{2a_0}\left(e^{2\mu} - e^{-2\mu}\right)\left(e^{s} + e^{-s} - \cos 2\theta \left(e^{s} - e^{-s}\right)\right) \operatorname{sh} s$$

$$\frac{\partial A^i}{\partial \mu} = \frac{H_0 d^2}{4a_0}\left(e^{2\mu} - e^{-2\mu}\right)\left(e^{2s} - e^{-2s} - \cos 2\theta \left(e^{s} - e^{-s}\right)^2\right) \tag{52}$$

$$\frac{\partial A^i}{\partial \theta} = \frac{H_0 d^2}{a_0} \sin 2\theta \left(\operatorname{sh}^2\mu \left(e^{2s} - 1\right) - \operatorname{ch}^2\mu \left(1 - e^{-2s}\right)\right)$$

$$\frac{\partial A^i}{\partial \theta} = \frac{H_0 d^2}{a_0} \sin 2\theta \left(\operatorname{sh}^2\mu + \operatorname{ch}^2\mu - \operatorname{sh}^2\mu\, e^{2s} - \operatorname{ch}^2\mu\, e^{-2s}\right) \tag{53}$$

En vue d'assurer la continuité du champ magnétique à la surface de séparation, nous allons expliciter la valeur de ces dérivées (52) et (53) sur cette surface S.

L'équation de S en coordonnées cartésienne est :

$$\frac{x^2}{a_0^2 e^{2\sigma}} + \frac{y^2}{a_0^2 e^{-2\sigma}} - 1 = 0 \qquad (54)$$

L'équation en coordonnées elliptiques est $\mu = \mu_0$.

De l'expression (44) de l'ellipse en fonction de μ on déduit :

$$\text{th}\,\mu_0 = e^{-2\sigma} \qquad (55)$$

Compte tenu de cette relation on peut écrire les expressions des dérivées partielles (52) et (53) sur la surface limite de la façon suivante :

$$\left.\frac{\partial A^i}{\partial \mu}\right|_{\mu_0} = \frac{H_0 d^2}{a_0}\left(1 - \cos 2\theta\, e^{-2\mu_0}\right) \qquad (56)$$

$$\left.\frac{\partial A^i}{\partial \theta}\right|_{\mu_0} = -\frac{H_0 d^2}{a_0} \sin 2\theta\, e^{-2\mu_0} \qquad (57)$$

Pour ce faire on a utilisé les relations suivantes :

$$e^{2\sigma} - e^{-2\sigma} = (\text{th}\,\mu_0)^{-1} - \text{th}\,\mu_0 = \frac{4}{e^{2\mu_0} - e^{-2\mu_0}}$$

$$(e^{\sigma} - e^{-\sigma})^2 = e^{2\sigma} + e^{-2\sigma} - 2 = (\text{th}\,\mu_0)^{-1} + \text{th}\,\mu_0 - 2$$

$$= \frac{4 e^{-2\mu_0}}{e^{2\mu_0} - e^{-2\mu_0}}$$

$$\text{ch}^2\mu_0 + \text{sh}^2\mu_0 - \text{sh}^2\mu_0\, e^{2\sigma} - \text{ch}^2\mu_0\, e^{-2\sigma} =$$

$$\text{ch}^2\mu_0 + \text{sh}^2\mu_0 - 2\,\text{sh}\,\mu_0\,\text{ch}\,\mu_0 = (\text{ch}\,\mu_0 - \text{sh}\,\mu_0)^2 = e^{-2\mu_0}$$

Déterminons maintenant l'expression du potentiel magnétique extérieur induit par ces courants.
Soit $\vec{A}^e$ ce potentiel. Il est tel que

$$\vec{A}^e = A^e(x, y, t)\,\vec{k}$$

et A^e doit satisfaire l'équation (47) : $\dfrac{\partial^2 A^e}{\partial \mu^2} + \dfrac{\partial^2 A^e}{\partial \theta^2} = 0$

De plus, si le champ magnétique est continu à la traversée de la surface fluide-vide les dérivées partielles de A^e calculées pour $\mu = \mu_o$ doivent coincider avec les expressions (56) et (57).

On doit donc chercher une solution du type :

$$A^e = f(\mu, t)\cos 2\theta + g(\mu, t)$$

Cette expression, reportée dans (47) permet de préciser la forme des fonctions f et g.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad g = \alpha(t)\,\mu + \beta(t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} = 4f \quad \Rightarrow \quad f = \delta(t)\,e^{-2\mu} + \varepsilon(t)\,e^{2\mu}$$

Si on impose pour des raisons physiques évidentes la convergence du champ magnétique à l'infini, il est nécessaire de choisir $\varepsilon(t) \equiv 0$:

$$A^e = \delta(t)\,e^{-2\mu}\cos 2\theta + \alpha(t)\,\mu + \beta(t) \qquad (58)$$

Calculons, à partir de cette expression, les dérivées partielles sur la surface limite.

On obtient aisément :

$$\left.\frac{\partial A^e}{\partial \mu}\right|_{\mu_0} = -2\delta(t)\, e^{-2\mu_0} \cos 2\theta + \alpha(t) \qquad (59)$$

$$\left.\frac{\partial A^e}{\partial \theta}\right|_{\mu_0} = -2\delta(t)\, e^{-2\mu_0} \sin 2\theta \qquad (60)$$

En comparant les expressions (56) et (59) d'une part et (57) et (60) d'autre part, on voit que les deux dérivées partielles peuvent être continues à la surface limite. Les valeurs des fonctions $\alpha(t)$ et $\delta(t)$ étant :

$$\alpha(t) = \frac{H_0 \lambda^2}{a_0} \qquad \delta(t) = \frac{H_0 \lambda^2}{2a_0}$$

Le champ magnétique induit est donc bien continu à la surface de séparation fluide-vide.
A l'extérieur, il dérive du potentiel

$$\vec{A}^e = \frac{H_0 \lambda^2}{2a_0} \left(\cos\theta \cdot e^{-2\mu} + 2\mu + \beta(t) \right) \vec{k}$$

(La fonction $\beta(t)$ peut être déterminée par la continuité de la fonction A elle-même).
On peut déterminer la dépendance en temps de λ, du système :

$$a_0^2 e^{2s} = \lambda^2 \operatorname{ch}^2 \mu_0$$

$$a_0^2 e^{-2s} = \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \mu_0$$

On déduit

$$\lambda^2 = 2a_0^2 \operatorname{sh} 2s$$

Finalement :

$$A^e = H_0 a_0 \left(\cos 2\theta \cdot e^{-2\mu} + 2\mu + \beta(t) \right) \operatorname{sh} 2s \qquad (61)$$

c) cas compressible $\rho = \rho_0 e^{-(s+\tau)}$

Nous allons, dans ce paragraphe, reprendre les calculs précédents dans le cas plus général où la densité évolue au cours du temps. De la même façon que précédemment nous allons déterminer la solution extérieure du potentiel magnétique induit par les courants en assurant la continuité de la composante normale du champ magnétique. Il conviendra de plus de retrouver les résultats du cas incompressible lorsque $\tau(t) = -s(t)$.

Dans le cas compressible la solution intérieure du potentiel magnétique créé par les courants induits s'écrit :

$$A^i = \frac{H_0}{a_0}\left[\frac{y^2}{e^{2\tau}} - \frac{x^2}{e^{2s}} - y^2 + x^2\right] \qquad (62)$$

En coordonnées elliptiques ce potentiel s'écrit :

$$A^i = \frac{H_0 \lambda^2}{a_0}\left[sh^2\mu \sin^2\theta \left(e^{-2\tau} - 1\right) - ch^2\mu \cos^2\theta \left(e^{-2s} - 1\right)\right] \qquad (63)$$

On en déduit les expressions des dérivées partielles

$$\frac{\partial A^i}{\partial \mu} = \frac{2\lambda^2 H_0}{a_0} ch\mu\, sh\mu \left[\sin^2\theta \left(e^{-2\tau} - 1\right) - \cos^2\theta \left(e^{-2s} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{\lambda^2 H_0}{4a_0}\left(e^{2\mu} - e^{-2\mu}\right)\left[\left(1 - \cos 2\theta\right)\left(e^{-2\tau} - 1\right) - \left(1 + \cos 2\theta\right)\left(e^{-2s} - 1\right)\right]$$

$$\frac{\partial A^i}{\partial \mu} = \frac{\lambda^2 H_0}{4a_0}\left(e^{2\mu} - e^{-2\mu}\right)\left[e^{-2\tau} - e^{-2s} - \cos 2\theta \left(e^{-2s} + e^{-2\tau} - 2\right)\right] \qquad (64)$$

$$\frac{\partial A'}{\partial \theta} = \frac{\lambda^2 H_0}{a_0} \sin 2\theta \left[\mathrm{ch}^2\mu \left(e^{-2\sigma} - 1\right) + \mathrm{sh}^2\mu \left(e^{-2\tau} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{H_0 \lambda^2}{a_0} \sin 2\theta \left[\left(\mathrm{ch}^2\mu\, e^{-\sigma+\tau} + \mathrm{sh}^2\mu\, e^{-\tau+\sigma}\right) e^{-(\sigma+\tau)} - \mathrm{ch}^2\mu - \mathrm{sh}^2\mu \right]$$

$$= \frac{H_0 \lambda^2}{a_0} \sin 2\theta \left\{ \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\tau)} \left[(1+\mathrm{ch}\,2\mu) e^{-\sigma+\tau} + (\mathrm{ch}\,2\mu - 1) e^{-\tau+\sigma} \right] - \mathrm{ch}^2\mu - \mathrm{sh}^2\mu \right\}$$

$$\frac{\partial A'}{\partial \theta} = \frac{H_0 \lambda^2}{a_0} \sin 2\theta \left\{ \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\tau)} \left[e^{-\sigma+\tau} - e^{-\tau+\sigma} + \mathrm{ch}\,2\mu \left(e^{-\sigma+\tau} + e^{-\tau+\sigma}\right)\right] - \mathrm{ch}^2\mu - \mathrm{sh}^2\mu \right\} \tag{65}$$

Pour déterminer les valeurs de ces dérivées sur la surface limite d'équation $\mu = \mu_0$, il faut déterminer μ_0. De l'équation cartésienne de S :

$$\frac{x^2}{a_0^2 e^{2\sigma}} + \frac{y^2}{a_0^2 e^{2\tau}} - 1 = 0 \tag{35}$$

on déduit, par comparaison avec l'équation correspondante (44) exprimée en fonction de μ, l'équation d'évolution de μ_0 :

$$\mathrm{th}\,\mu_0 = e^{-\sigma+\tau} \tag{66}$$

Sur cette surface les dérivées (64) et (65) deviennent

$$\left.\frac{\partial A'}{\partial \mu}\right|_{\mu_0} = \frac{\lambda^2 H_0}{a_0} \left\{ e^{-(\sigma+\tau)} - \cos 2\theta \left[\mathrm{ch}\,2\mu_0\, e^{-(\sigma+\tau)} - \mathrm{sh}\,2\mu_0 \right] \right\} \tag{67}$$

$$\left.\frac{\partial A'}{\partial \theta}\right|_{\mu_0} = \frac{\lambda^2 H_0}{a_0} \sin 2\theta \left[\mathrm{sh}\,2\mu_0\, e^{-(\sigma+\tau)} - \mathrm{ch}\,2\mu_0 \right] \tag{68}$$

On a utilisé les relations suivantes :

$$e^{-2s} - e^{-2\tau} = e^{-(s+\tau)}\left[e^{-s+\tau} - e^{-\tau+s}\right]$$

$$= e^{-(s+\tau)}\left[\text{th}\,\mu_0 - (\text{th}\,\mu_0)^{-1}\right]$$

$$= e^{-(s+\tau)} \frac{-4}{e^{2\mu_0} - e^{-2\mu_0}}$$

et

$$e^{-2s} + e^{-2\tau} = e^{-(s+\tau)}\left(e^{-s+\tau} + e^{-\tau+s}\right)$$

$$= e^{-(s+\tau)}\left(\text{th}\,\mu_0 + (\text{th}\,\mu_0)^{-1}\right)$$

$$= e^{-(s+\tau)} \frac{2\left(e^{2\mu_0} + e^{-2\mu_0}\right)}{e^{2\mu_0} - e^{-2\mu_0}}$$

Dans la zone de vide qui entoure le fluide, le potentiel vecteur créé par les courants induits est toujours du type

$$A^e = \delta(t)\, e^{-2\mu} \cos 2\theta + \alpha(t)\,\mu + \beta(t) \qquad (58)$$

La fonction $\delta(t)$ est déterminée grâce à la condition de continuité de la composante du champ magnétique B_μ, normale à la surface limite $\mu = \mu_0$. Cette composante étant proportionnelle à la dérivée partielle $\partial A/\partial\theta$ on doit avoir

$$\left.\frac{\partial A^i}{\partial\theta}\right|_{\mu_0} = \left.\frac{\partial A^e}{\partial\theta}\right|_{\mu_0} \qquad (69)$$

Des expressions (60) et (68) on déduit :

$$\delta(t) = -\frac{\lambda^2 H_0}{2a_0}\left[\operatorname{sh} 2\mu_0\, e^{-(s+\tau)} - \operatorname{ch} 2\mu_0\right] e^{2\mu_0} \qquad (70)$$

cette expression ne permet pas d'assurer la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique, d'après (59) et (67).

Pour déterminer les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, nous allons assurer la continuité de la fonction $A(x,y,t)$ elle-même à la traversée de la surface $\mu = \mu_0$ et imposer à la solution finale de contenir le cas du fluide incompressible lorsque $\tau = -s$.

Réécrivons l'expression (63) du potentiel A^i en coordonnées élliptiques, sous la forme :

$$A^i = \frac{\lambda^2 H_0}{2a_0}\left\{ \operatorname{sh}^2\mu\left(e^{-2\tau}-1\right) - \operatorname{ch}^2\mu\left(e^{-2s}-1\right) - \cos 2\theta\left[\operatorname{sh}^2\mu\left(e^{-2\tau}-1\right) + \operatorname{ch}^2\mu\left(e^{-2s}-1\right)\right]\right\}$$

A la surface du fluide, $\mu = \mu_0$ et $\operatorname{th}\mu_0 = e^{-s+\tau}$.

Le facteur de $\cos 2\theta$ s'écrit pour $\mu = \mu_0$

$$\operatorname{sh}^2\mu_0\left(e^{-2\tau}-1\right) + \operatorname{ch}^2\mu_0\left(e^{-2s}-1\right) = e^{-(s+\tau)}\operatorname{sh} 2\mu_0 - \operatorname{ch} 2\mu_0$$

Quant à l'autre terme, il se réduit à l'unité :

$$\operatorname{sh}^2\mu_0\left(e^{-2\tau}-1\right) - \operatorname{ch}^2\mu_0\left(e^{-2s}-1\right) = 1$$

(On a utilisé les relations citées pages

Le potentiel A^i prend sur la surface la valeur :

$$A^i(\mu_0) = \frac{\lambda^2 H_0}{2a_0}\left(1 - \cos 2\theta\left(e^{-(s+\tau)}\operatorname{sh} 2\mu_0 - \operatorname{ch} 2\mu_0\right)\right) \qquad (71)$$

La continuité de ce potentiel avec la solution extérieure

$$A^e(\mu_0) = \delta(t)\, e^{-2\mu_0} \cos 2\theta + \alpha\mu_0 + \beta(t) \qquad (58)$$

impose

$$\alpha(t)\,\mu_0 + \beta(t) = \frac{\lambda^2 H_0}{2a_0} \qquad (72)$$

Posons

$$\alpha(t) = \frac{\lambda^2 H_0}{a_0}\,\gamma(t) \qquad (73)$$

Le potentiel extérieur s'écrit :

$$A^e = \frac{\lambda^2 H_0}{2a_0}\left[\cos 2\theta\left(\operatorname{ch} 2\mu_0 - \operatorname{sh} 2\mu_0\, e^{-(\sigma+\tau)}\right) e^{2(\mu_0-\mu)} + 2\gamma(t)\,(\mu-\mu_0) + 1\right] \qquad (74)$$

A l'aide de cette expression on peut calculer la dérivée partielle $\partial A^e/\partial\mu\,|_{\mu_0}$ en vue de déterminer la discontinuité du champ magnétique.

$$\frac{\partial A^e}{\partial \mu}\Big|_{\mu_0} = \frac{\lambda^2 H_0}{a_0}\left[\gamma(t) - \cos 2\theta\left(\operatorname{ch} 2\mu_0 - \operatorname{sh} 2\mu_0\, e^{-(\sigma+\tau)}\right)\right] \qquad (75)$$

La dérivée correspondante du potentiel A^i est donnée par (67)

$$\frac{\partial A^i}{\partial \mu}\Big|_{\mu_0} = \frac{\lambda^2 H_0}{a_0}\left[e^{-(\sigma+\tau)} - \cos 2\theta\left(\operatorname{ch} 2\mu_0\, e^{-(\sigma+\tau)} - \operatorname{sh} 2\mu_0\right)\right]$$

On peut donc choisir :

$$\gamma(t) = e^{-(\sigma+\tau)} \qquad (76)$$

Dans ce cas la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique est proportionnelle à :

$$\cos 2\theta \left(\operatorname{sh} 2\mu_0 - \operatorname{ch} 2\mu_0 e^{-(s+\tau)} + \operatorname{ch} 2\mu_0 - \operatorname{sh} 2\mu_0 e^{-(s+\tau)} \right)$$

soit, à

$$\cos 2\theta \left(1 - e^{-(s+\tau)} \right) e^{2\mu_0} \qquad (77)$$

Cette discontinuité du champ magnétique traduit la présence d'un courant de surface. Si j est la densité de ce courant, j a pour expression

$$j = \frac{c}{4\pi} \left| B_\mu^{ext} - B_\mu^{int} \right|_{\mu_0} \qquad (78)$$

D'après (46) et (77)

$$j = \frac{c}{4\pi} \frac{\lambda H_0}{a_0 D} \left| \cos 2\theta \left(1 - e^{-(s+\tau)} \right) \right| e^{2\mu_0} \qquad (79)$$

Soit en explicitant la dependance en temps des facteurs λ et $e^{2\mu_0}$

$$j = \frac{H_0 c}{4\pi D} (2 \operatorname{sh} 2s)^{1/2} \left| \frac{1 + e^{\tau - s}}{1 - e^{\tau - s}} \left(1 - e^{-(s+\tau)} \right) \cos 2\theta \right| \qquad (80)$$

Remarque : Lorsque $\tau = -s$, $j_{\tau = -s} = 0$ et $\gamma_{\tau = -s}(t) = 1$

On retrouve bien la continuité du champ magnétique qui se traduit par l'absence de courant de surface dans le cas incompressible. Cependant le choix de la fonction $\gamma(t)$ n'est pas unique. $\gamma(t) = 1$ est aussi une solution correcte. Elle fait apparaitre dans l'expression du courant j un terme $1 - e^{-(s+\tau)}$ qui s'annulle également lorsque $\tau = -s$.

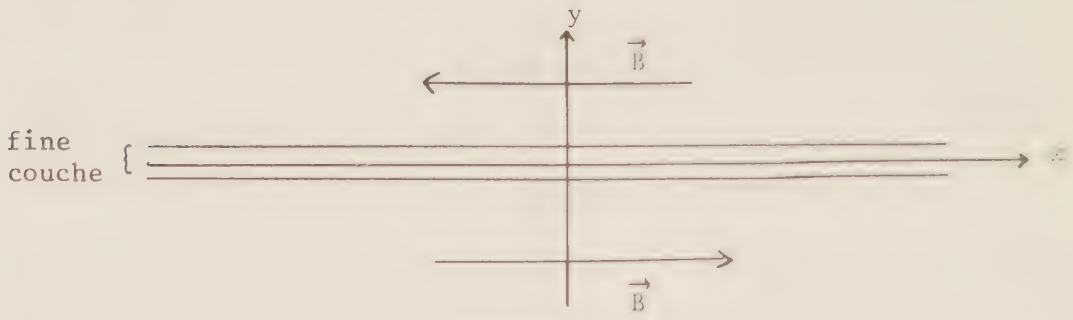
V - CONCLUSION

Nous avons développé une solution exacte des équations de la magnétohydrodynamique dans le cas d'un cylindre de fluide dont l'axe $\vec{z}$ coïncide avec la ligne neutre d'un champ magnétique permanent de configuration hyperbolique dans le plan (x,y).

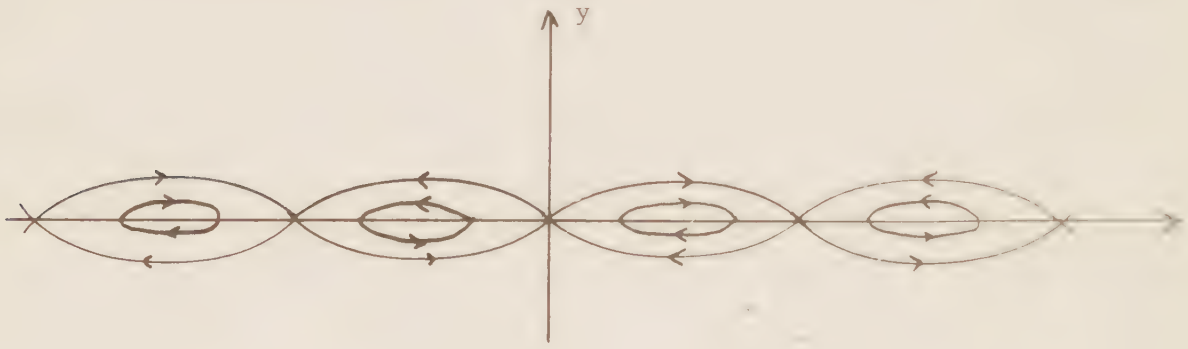
Nous avons exprimé toutes les grandeurs qui définissent l'état de l'ensemble fluide-champ magnétique à l'aide de deux fonctions du temps $s(t)$ et $\tau(t)$ dans le cas du fluide compressible, et de leur dérivée première. Ces deux fonctions doivent satisfaire deux équations différentielles. Dans le cas du fluide, une seule solution $s(t)$ suffit. La résolution numérique des équations différentielles faite par Chapman et Kendall dans le cas du fluide limité incompressible et par Imshennik et Syrovatskii dans le cas du fluide compressible illimité montre que le fluide tend à former une fine couche dans le plan (x,z). Dans notre calcul, pour le fluide incompressible d'extension finie, nous avons montré que la continuité du champ magnétique provient de l'évolution particulière de la surface S qui limite le fluide. L'équation $\text{th}\ \mu_o = e^{-2s}$ provient du fait que la surface de l'ellipse S reste constante au cours du mouvement. Les demi-axes de l'ellipse qui limite le fluide sont proportionnels à e^{-s} pour le petit et à e^{s} pour le grand. Dans le cas où la densité du fluide varie au cours du temps, la section du fluide n'est évidemment plus constante mais proportionnelle à $e^{s+\tau}$. C'est cette fonction du temps qui empêche la continuité du champ magnétique et impose la présence d'un courant de surface. Ceci est à rapprocher des fines couches de courant observées dans les simulations numériques faites par Sato [4] sur un modèle de reconnection magnétique à deux dimensions.

L'évolution du système ne peut pas être décrite jusqu'au stade ultime de la couche infiniment mince. Le calcul de l'énergie cinétique fait par Chapman et Kendall montre par exemple que celle-ci devient suffisamment mince, le champ magnétique de part et d'autre

tend à avoir la configuration antiparallèle montrée sur la figure ci-dessous



Or d'après les travaux de Furth et al [3], une telle configuration est instable : au voisinage d'une couche neutre les effets dus à la résistivité du fluide ne sont plus négligeables. L'instabilité peut se traduire par une modification de la topologie du champ magnétique au voisinage de la ligne neutre, due à la reconnection des lignes de champ qui forment alors des "îlots"



Cette instabilité (tearing-mode instability) a été étudiée par Furth et Killeen dans le cas d'un état d'équilibre où le fluide est au repos. Dans notre cas, le fluide est en mouvement et les équations de perturbation qui permettent de calculer le taux de croissance de l'instabilité comportent des facteurs dépendants du temps qui compliquent la résolution. L'étude du tearing-mode dans le cas du fluide incompréssible est en préparation.

REFERENCES

[1] Chapman, S., et Kendall, P.C., 1963, Proc. Roy. Soc. A 273, 435.

[2] Imshennik, V.S., et Syrovatskii, S.I., 1967, Soviet Physics JETP 25, 656.

[3] Furth, H.P., Killeen, J., Rosenbluth, M.N., 1963, Phys. Fluids, 6, 459.

[4] Sato, T., 1979, Journal of Geophysical Research 84 n° A 12, 7177.